PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 16. 15. August 1921. 22. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 18 am 22. August 1921.

INHALT:

Originalmitteilungen:
F. Zwicky, Der zweite Virialkoeffizient von Edelgasen. S. 449.
N. H. Kolkmeijer, Raum-Zeit-Symmetrie. S. 457.

Zusammenfassende Bearbeitungen:
J. Franck, Über Lichtanregung und Ionisation von Atomen und Molekülen durch Stöße langsamer Elektronen. (Fortsetzung u. Schluß.) S. 466.

Besprechungen:
E. Grimsehl, Lehrbuch der Physik. S. 471.
N. Bohr, Abhandlungen über Atombau aus den Jahren 1913—16. S. 472.

Tagesereignisse. S. 472.
Personalien. S. 472.
Gesuche. S. 472.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Der zweite Virialkoeffizient von Edelgasen.

Von F. Zwicky.

Es soll im folgenden die Zustandsgleichung für Helium und Argon abgeleitet werden auf Grund der Debyeschen Theorie[1] über die gegenseitige Anziehung polarisierbarer Moleküle. Dabei bietet die Durchführung der Rechnung mit Edelgasen ganz besondere Vorteile. Wie noch gezeigt wird, brauchen hier die Orientierungskräfte der festen elektrischen Molekülsysteme aufeinander nicht in Betracht gezogen zu werden. Wir benutzen daher ein Kraftgesetz, das nur von der Entfernung zweier Moleküle abhängt, nicht aber von ihrer sonstigen Orientierung. Dieser letztere, von Keesom[2]) auf den zweiten Virialkoeffizienten als hauptbestimmend angesehene Effekt, fällt ganz weg. Es ergibt sich damit die Möglichkeit einer experimentellen Entscheidung zwischen den beiden von Debye[3]) und Keesom vertretenen Auffassungen. Debye, der für die van der Waalsschen Kohäsionskräfte bei Edelgasen nur die Anziehung der Moleküle durch gegenseitige Polarisation verantwortlich macht, hat bereits auf mehrere Tatsachen hingewiesen, welche seine Theorie qualitativ stützen. Hier soll der Beweis geleistet werden, daß dieselbe auch in quantitativer Hinsicht das vorliegende Erfahrungsmaterial sehr gut wiedergibt.

Die weitere Tatsache, daß bei den Edelgasen Quanteneffekte auch bei sehr tiefen Temperaturen keine wesentliche Rolle für die Zustandsgleichung spielen, trägt in Verbindung mit der schon erwähnten Kugelsymmetrie der Atome in erheblichem Maße dazu bei, die Rechnungen zu vereinfachen.

Die im obigen aufgestellten Behauptungen können wir durch einige Überlegungen stützen.

a) Die spezifische Wärme von Edelgasen bei konstantem Volumen ist in sehr großem Temperaturbereich bestimmt worden und hat sich zu $\frac{3}{2}R$ pro Mol ergeben. Die ganze Energie ist also rein translatorischer Natur (abgesehen von einer eventuellen Nullpunktsenergie). Deshalb darf die gegenseitige Orientierung der Atome keinen Einfluß haben auf die Wärmekapazität des Systems. In diesem Fall hätte die kinetische Energie einen nicht zu vernachlässigenden Rotationsanteil, und es würde $C_v > \frac{3}{2}R$. Inwiefern eine Einstellung des Atoms im elektrischen Kraftfeld eines andern doch vorhanden sein kann, wird später noch erwähnt werden.

b) Von S. Chapman[1]) ist die kinetische Theorie mäßig verdünnter Gase, bei Voraussetzung kugelsymmetrischer Atome, streng entwickelt worden. Durch Integration der bekannten Maxwellschen Integrodifferentialgleichung gelingt es ihm, genaue Formeln für die Wärmeleitfähigkeit ϑ und den Reibungskoeffizienten μ in Abhängigkeit vom molekularen Kraftgesetz abzuleiten. Es gilt unter anderem auch die Beziehung

$$\vartheta = \varkappa \mu C_v \quad (C_v = \text{spez. Wärme bei konstantem Volumen}).$$

Dabei ergibt sich $\varkappa$ als beinahe unabhängig von der speziellen Natur der Atome, und zwar ist $\varkappa = 2{,}5$. Diese Zahl stimmt nun ausgezeichnet mit den experimentellen Daten bei Edelgasen überein (Helium $\varkappa = 2{,}507$, Argon $\varkappa = 2{,}501$). Für mehratomige Gase besteht auch die obige Beziehung, wobei aber $\varkappa$ Werte von 1,5 bis 2 annimmt. Da die Zahl 2,5 nur von der Voraussetzung der Kugelsymmetrie herrührt, können wir also bei den Edelgasen auf diese Eigenschaft schließen.

c) Theoretisch ist zu a und b noch folgendes zu sagen. Bei hohen Temperaturen haben auch mehratomige Moleküle eine so große kinetische

1) P. Debye, diese Zeitschr. **21**, 178, 1920.
2) W. H. Keesom, Proceedings of Amst. Academy 1916; diese Zeitschr. **22**, 129, 1921.
3) P. Debye, diese Zeitschr. **22**, 302, 1921.

1) S. Chapman, Phil. Transactions of Royal Society 1911, 1916, 1917.

Energie, daß die Orientierungskräfte nicht imstande sind, dieselben am Überschlagen zu hindern. Wir dürfen dann die Kraftwirkungen mit einer über eine Kugel gemittelten Feldstärke berechnen, wobei nur noch Anziehung durch Polarisation und eventuell zentrale Abstoßung übrig bleibt. Die Edelgase nehmen nun insofern eine Sonderstellung ein, als bei ihnen dieses Rechnungsverfahren schon bei tiefsten Temperaturen erlaubt sein muß, da wir nach a eine mit der Temperatur wachsende Kreiselenergie, in dem uns bekannten Bereich, nicht annehmen dürfen. Es muß also so sein, daß die Rotationsenergie entweder dauernd null ist oder einen bestimmten Nullpunktswert beibehält. Erstere Annahme bereitet erhebliche Schwierigkeiten für die Vorstellung des Zusammenstoßes. Man könnte nicht recht verstehen, wieso bei einem solchen die Achsen der Moleküle sich immer parallel bleiben sollten. Damit die zweite Auffassung zu Recht besteht, muß folgendes gelten.

Die Energie eines freien Kreisels auf der n-Quantenbahn ist

$$\frac{n^2 h^2}{8\pi^2 J}.$$

Damit das Atom dauernd im ersten Quantenzustand bleibt, darf die Temperatur einen gewissen Wert T_1 nicht überschreiten, für welchen die Ungleichung besteht

$$\frac{h^2}{8\pi^2 J} < k T_1 \quad (J \text{ Trägheitsmoment.}) \qquad (k = 1{,}37 \cdot 10^{-16} \text{ erg}). \tag{1}$$

Ist

$$T < \frac{h^2}{8\pi^2 k J},$$

so kommen in zu berücksichtigender Anzahl Zusammenstöße vor, welche den Kreisel auf die zweite und höhere Quantenbahnen werfen. Setzen wir für Edelgase $J = 10^{-43}$, so wird

$$T_1 < \frac{(6{,}55 \cdot 10^{-27})^2}{8\pi^2 \cdot 10^{43} \cdot 1{,}31 \cdot 10^{-16}} \sim 5000^0.$$

Daraus folgt, daß Helium, Neon, Argon usw. bis zu den höchsten bekannten Temperaturen die spezifische Wärme $\frac{3}{2} R$ haben müssen. Eine Vorstellung über das Verhalten beim Zusammenstoß kann man sich nach der Adiabatenhypothese machen. Die Kreiselenergie wird sich nämlich, bei konstant gehaltenen Quantenzahlen, innerhalb der Wirkungssphäre eines andern Moleküls, kontinuierlich ändern. Sobald aber der Kreisel frei ist, besitzt er wieder die Energie

$$\frac{h^2}{8\pi^2 J}.$$

Die Änderung der Energien, und damit auch ihrer Differenzen in Kraftfeldern, bedingt wahrscheinlich bei nicht zu hohen Temperaturen die Breite der Bandenlinien. Auf die Wärmekapazität des Gases ist aber natürlich diese Änderung ohne Einfluß.

Damit die sphärische Symmetrie der Atome gewährleistet ist, muß die Rotationsenergie groß sein gegenüber der maximalen Differenz der potentialen $\Delta\Phi$, d. h.

$$\frac{h^2}{8\pi^2 J} >> \Delta\Phi. \tag{2}$$

$\Delta\Phi$ berechnet sich folgendermaßen: Das Molekül enthalte elektrische Ladungen $e_\varkappa$, welche in Punkten mit den Koordinaten $\xi_\varkappa$, $\eta_\varkappa$, $\zeta_\varkappa$ liegen. In einem im Abstand r vom Nullpunkt liegenden Aufpunkt $p\,(x, y, z)$ ist das Potential

$$\begin{aligned} q = {} & \frac{\sum e_\varkappa}{r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{x}{r}\sum e_\varkappa \xi_\varkappa + \frac{y}{r}\sum e_\varkappa \eta_\varkappa + \right. \\ & \left. + \frac{z}{r}\sum e_\varkappa \zeta_\varkappa\right] + \frac{1}{r^3}\left[\frac{1}{2}\left(3\frac{x^2}{r^2} - 1\right)\sum e_\varkappa \xi_\varkappa^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2}\left(3\frac{y^2}{r^2} - 1\right)\sum e_\varkappa \eta_\varkappa^2 + \\ & + \frac{1}{2}\left(3\frac{z^2}{r^2} - 1\right)\sum e_\varkappa \zeta_\varkappa^2 + \\ & + \frac{3xy}{r^2}\sum e_\varkappa \xi_\varkappa y_\varkappa + \frac{3yz}{r^2}\sum e_\varkappa y_\varkappa \zeta_\varkappa + \\ & \left. + \frac{3zx}{r^2}\sum e_\varkappa \zeta_\varkappa \xi_\varkappa\right] + \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

Für ungeladene Moleküle verschwindet das erste Glied. Das zweite Glied ist ungleich Null, wenn ein fester Dipol da ist. Das ist aber bei den Edelgasen nicht der Fall, da sie keine Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten zeigen. Wir haben also mit den dritten Gliedern zu rechnen. Das Molekül verhält sich wie ein elektrischer Quadrupol. Nach geeigneter Wahl des Koordinatensystems (Hauptachsentransformation) kann dieser charakterisiert werden durch die drei Größen

$$\Theta_1 = \sum e_\varkappa \xi_\varkappa^2, \quad \Theta_2 = \sum e_\varkappa y_\varkappa^2, \quad \Theta_3 = \sum e_\varkappa \zeta_\varkappa^2. \tag{4}$$

Man erhält nun leicht nach dem Coulombschen Gesetz die gegenseitige potentielle Energie Φ von zwei solchen elektrischen Systemen. Ermittelt man dann die maximale Differenz der Φ-Werte bei konstant gehaltenem r, so findet man

$$[\Delta\Phi]_{\text{maximal}} \leqq 9\,\frac{\tau^2}{r^3}.$$

Variiert man noch r, so erhält man den größten Wert, wenn die Atome sich berühren, also $r = d$ dem Durchmesser derselben ist.

Wir benutzen z. B. die unten aus unserer Rechnung folgenden Daten für Helium, nämlich:

$\tau = 1{,}31 \cdot 10^{-26}$, $d = 2{,}7 \cdot 10^{-8}$, $J \sim 10^{-43}$.

Es wird

$$\frac{h^2}{8\pi^2 J} = \frac{6{,}5^2 \cdot 10^{-54}}{8 \cdot \pi^2 \cdot 10^{43}} \backsim 4{,}9 \cdot 10^{-12},$$

$$\Delta\Phi = 9 \cdot \frac{1{,}69 \cdot 10^{-52}}{2{,}7^5 \cdot 10^{-40}} \sim \frac{10^{-12}}{144}.$$

Also

$$\frac{h^2}{8\pi^2 J} \sim 750\, \Delta\Phi.$$

Wir können also die Kraftwirkung zweier Atome im Abstande r ruhig mit Hilfe einer, über die Kugel vom Radius r gemittelten elektrischen Feldstärke berechnen.

Zum Vergleich wollen wir noch die obige Überschlagsrechnung auf ein zweiatomiges Gas, z. B. Wasserstoff anwenden. Mit $J = 5 \cdot 10^{-40}$, $d = 2{,}1 \cdot 10^{-8}$ und $\tau = 3 \cdot 10^{-26}$ erhalten wir für T_1 die Ungleichung

$$T_1 \ll \frac{h^2}{8\pi^2 k J} \sim \frac{300^0}{\pi} \sim 100^0.$$

In der Tat verhält sich Wasserstoff bis zu 60° abs. in kalorischer Hinsicht wie ein einatomiges Gas. Dann füllen sich auch die andern Quantenzustände $n = 2, 3, \ldots$ auf, d. h. die spezifische Wärme wird größer als $\frac{3}{2} R$, bis sie bei ungefähr 300° abs. den vollen Wert $\frac{5}{2} R$ erreicht.

Die Gleichung (2) liefert hier

$$\Delta\Phi = 9\,\frac{\tau^2}{d^5} = \frac{81 \cdot 10^{-52}}{41 \cdot 10^{-40}} \sim 2 \cdot 10^{-12},$$

$$\frac{h^2}{8\pi^2 J} = \frac{10^{-54}}{\pi^2 \cdot 10^{-40}} = \sim 10^{-15},$$

so daß

$$\frac{h^2}{8\pi^2 J} \ll \Delta\Phi.$$

Hier darf man also die Orientierungskräfte nicht vernachlässigen, da die Moleküle in der gegenseitigen Wirkungssphäre pendeln. Dadurch kompliziert sich die Rechnung erheblich. Über diesen Fall soll erst in einer spätern Arbeit berichtet werden.

§ 4. Zustandsgleichung von Argon.

Nach Kamerlingh Onnes schreibt man die Zustandsgleichung in der Form

$$\frac{pv}{RT} = \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{v} + \frac{\mathfrak{C}}{v^2} + \frac{\mathfrak{D}}{v^4} + \frac{\mathfrak{E}}{v^6} + \frac{\mathfrak{F}}{v^8} \quad \left| \quad (v = \text{Molvolumen}), \right. \tag{5}$$

wobei $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$, die sogenannten Virialkoeffizienten, Funktionen der Temperatur sind. $\mathfrak{A} = RT$ ist der erste, $\mathfrak{B}$ der zweite Virialkoeffizient. Diesen wollen wir bestimmen. Um $\mathfrak{C}$ genau zu bekommen, müßte man, wie schon Boltzmann gezeigt hat, die Wahrscheinlichkeit der Zusammenstöße von drei Molekülen zugleich berücksichtigen.

Die Atome setzen wir als starre Kugeln voraus, auf denen polarisierbare elektrische Quadrupole sitzen. Die auf Hauptachsen bezogenen elektrischen Momente seien

$$\Theta_1 = \sum e_x \xi_x^2, \quad \Theta_2 = \sum e_x \eta_x^2, \quad \Theta_3 = \sum e_x \zeta_x^2.$$

Zwei Atome im Abstand r voneinander besitzen dann eine mittlere potentielle Energie

$$u = -\frac{3\,\alpha\,\tau^2 1)}{r^8}, \tag{6}$$

wobei

$$\tau = (\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2) - (\Theta_1\Theta_2 + \Theta_2\Theta_3 + \Theta_3\Theta_1)$$

und $\mathfrak{m} = \alpha \mathfrak{E}$ das Moment des im Feld $\mathfrak{E}$ entstandenen Dipols ist.

Die Aufstellung der Zustandsgleichung erfolgt nun nach einem ganz allgemeinen Satze der statistischen Mechanik (Gibbs). Ist U die Gesamtenergie des Gases in Funktion der Lage- und Impulskoordination, so hat man das sogenannte Zustandsintegral

$$z = \int_{\text{alle Phasen}} e^{-\frac{U}{kT}}\, dS\, d\Sigma. \tag{7}$$

$dS\, d\Sigma$ ist ein Differential im $2u$ dimensionalen Phasenraum. dS ist das Produkt der Lagendifferentiale, $d\Sigma$ dasjenige der Impulsdifferentiale.

Nach dem Theorem von Gibbs[2] gilt dann für die freie Energie F des Systems die Beziehung

$$F = -kT \log z. \tag{8}$$

Ist einmal die freie Energie bekannt, so folgen die thermische sowie die kalorische Zustandsgleichung durch bloße Differentiation. Wir gehen nun zur Berechnung von F über. Als Volumen v nehmen wir dasjenige eines Mols. ω sei das Volumen des Atoms. Dann ist, wenn $dS_i = dx_i\, dy_i\, dz_i$ für das $i$te Atom mit den Koordinaten $(x_i\, y_i\, z_i)$

$$Z = \int_{\text{alle Phasen}} e^{-\frac{U_p + L}{kT}}\, dS\, d\Sigma,$$

wobei U_p die potentielle Energie des Gases und

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m}{2} \left| \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right|$$

die kinetische Energie desselben bedeutet. ($N = 6{,}31 \cdot 10^{23}$ Loschmidtsche Zahl.)

Die Integration über die Impulsdifferentiale ergibt in bekannter Weise

$$Z = \Theta^{3N} \int_{\text{(alle Lagen)}} e^{-\frac{U_p}{kT}}\, dS$$

$$\Theta = \sqrt{2\pi m k T}.$$

Das noch verbleibende Integral berechnet sich folgendermaßen:

1) P. Debye, diese Zeitschr. **21**, 178, 1920.
2) Gibbs, Elemente der statistischen Mechanik; L. S. Ornstein, Dissert. Leiden 1908.

$$\int_{(\text{alle Lagen})} e^{-\frac{U}{kT}} dS = \int \cdots \int_{\text{alle Lagen}} e^{-\frac{1}{kT} U(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_n, z_1 \ldots z_n)} dS_1 \ldots dS_n ,$$

$$= \int \cdots \int \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{u}{kT}} \right) \right] dS_1 \ldots dS_n =$$

$$= v \left[v - \omega - \int \left(1 - e^{-\frac{u(x,y,z)}{kT}} \right) dV \right] \left[v - 2\omega - 2 \int \left(1 - e^{-\frac{u}{kT}} \right) dV \right] \ldots$$

$$\ldots \left[v - (N-1)\omega - (N-1) \int \left(1 - e^{-\frac{u}{kT}} \right) dV \right].$$

Dabei sind die entsprechenden Integrale über das ganze Volumen v zu erstrecken. Klein u ist die gegenseitige potentielle Energie zweier Atome. Die obige Ausführung der Integration bedeutet folgendes: Man setzt zuerst ein Atom ins Volumen v und führt es überall herum. Das ist die Integration über dS_1. Da noch kein Kraftfeld vorhanden ist, liefert das einfach den Faktor v. Für das zweite Teilchen muß man schon dem vom ersten eingenommenen Raum ω aus dem Integrationsgebiet ausschließen und das Auftreten einer potentiellen Energie berücksichtigen. Das liefert den Faktor $[v - \omega - J]$, wenn wir abkürzen

$$J = \int \left(1 - e^{-\frac{u}{kT}} \right) dN.$$

Die Bestandteile des Integrals für das dritte und die weitern Atome berechnen wir so, als ob die vorhergehenden nur einzeln da wären und addieren dann die Einzeleffekte zueinander. Physikalisch bedeutet das, daß wir eine gewisse Verdünnung des Gases voraussetzen, d. h. es müssen die Abmessungen der zu berücksichtigenden Wirkungssphäre der Atome klein sein gegenüber der freien Weglänge.

Die freie Energie wird nun

$$F = -kT \log z = -NkT \log \Theta - NkT \log v + \frac{N-1}{2} NkT(\omega + J).$$

Daraus folgt durch Differentiation der Druck p

$$p = -\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{NkT}{v} - \frac{NkT}{v^2} N \frac{\omega + J}{2} + \ldots$$

$$\frac{pv}{RT} = 1 - \frac{N}{2}(\omega + J)\frac{1}{v} + \ldots$$

Der Vergleich mit (5) führt zu der Formel

$$\mathfrak{B} = -\frac{N}{2}(\omega + J). \qquad (9)$$

Wir haben nun noch das Integral J auszurechnen.

Statt daß wir das Volumen v als dessen Grenzen benutzen, setzen wir ein fest liegendes Atom in den Nullpunkt des Koordinatensystems und führen das bewegliche von der Berührung mit dem ersten bis ins Unendliche. Der dabei fälschlich zum Integral hinzukommende Betrag ist verschwindend klein, da die Energie mit der achten Potenz der Entfernung abnimmt. Wir setzen also

$$J = -4\pi \int_{r=d}^{\infty} \left[e^{\left(\frac{\varrho}{r}\right)^8} - 1 \right] r^2 dr.$$

Dabei ist d der Atomdurchmesser und

$$\varrho^8 = \frac{3\alpha r^2}{kT}$$

Substituieren wir

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)^8 = \xi, \quad 4r^2 dr = -\frac{\varrho^3}{2} \xi^{-\frac{11}{8}} d\xi,$$

so ist

$$J = -\frac{\pi}{4} \varrho^3 \int_0^x \left[e^{\xi} - 1 \right] \xi^{-\frac{11}{8}} d\xi,$$

$$x = \frac{T_0}{T}, \quad T_0 = \frac{3\alpha r^2}{\varkappa d^3}$$

Entwickelt man die Exponentialfunktion in eine Reihe und integriert gliedweise, so bekommt man

$$-\frac{J}{4\pi} = x^{\frac{3}{8}} \sum_1^{\infty} \frac{1}{u!} \frac{x^{u - \frac{3}{8}}}{u - \frac{3}{8}}$$

und damit die Gleichung (9)

$$\mathfrak{B} = \frac{\Omega}{2} \left[1 - \frac{3}{5} x - \frac{3}{26} x^2 - \frac{3}{126} x^3 - \frac{3}{696} x^4 - \frac{1}{5!} \frac{3}{37} x^5 - \frac{1}{6!} \frac{3}{45} x^6 - \frac{1}{7!} \frac{3}{53} x^7 - \ldots \right] = \frac{\Omega}{2} V. \qquad (10)$$

$$\Omega = \frac{4\pi}{3} d^3 N.$$

Die Reihenentwicklung ist gut zur numerischen Berechnung von $\mathfrak{B}$ für kleine Werte von x, d. h. bei hohen Temperaturen. Für große x konvergiert folgendes Verfahren rascher. Man integriert zuerst das obige Integral partiell

$$-\frac{J}{4\pi} = \left[(e^{\xi} - 1) \frac{\xi^{-\frac{3}{8}}}{-\frac{3}{8}} \right]_0^x - \int_0^x \frac{\xi^{-\frac{3}{8}}}{-\frac{3}{8}} e^{\xi} d\xi.$$

Nun wird substituiert $\xi = x - \eta$ und integriert, so daß man erhält

$$\frac{J}{4\pi} = \frac{e^x}{x^3}\left[\frac{1}{x} - e^{-x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] + \frac{11}{8}\frac{1}{2!}\left[\frac{2}{x^2} - e^{-x}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right] + \cdots$$

und

$$\mathfrak{B} = \frac{\Omega}{2}\left[1 - \frac{3}{8}e\left[x - e^{-x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] + \frac{11}{8}\frac{1}{2!}\left[\frac{2}{x^2} - e^{-x}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right] + \frac{11}{8}\frac{19}{8}\frac{1}{3!}\left[\frac{6}{x^3} - e^{-x}\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right)\right] + \cdots\right] \quad (11)$$

In dem für Argon bekannten Temperaturbereich genügt aber schon die Formel (10). Berechnen wir x_{B3}, für welches $\mathfrak{B} = 0$ (Boylepunkt), so finden wir

$$x_B = \frac{T_0}{T_B} = 1{,}260.$$

Weiter gilt für den Umkehrpunkt des differentiellen Thomsoneffektes nach der Thermodynamik

$$\mathfrak{B} - T_i\left(\frac{d\mathfrak{B}}{dT}\right)_i = 0.$$

Es wird

$$\frac{T_0}{T_i} = 0{,}6735.$$

Wenn Boyle- und Inversionspunkt bestimmt wären, könnte man sofort T_0 berechnen und hätte außerdem eine scharfe Prüfung der Theorie infolge der Beziehung

$$\frac{T_B}{T_i} = 0{,}535.$$

Leider sind T_B und T_i noch nicht gemessen, so daß man die theoretische Kurve für $\mathfrak{B}$ durch Variieren von T_0 an die experimentelle näherungsweise anschmiegen muß. Bilden wir für verschiedene Temperaturen $\frac{\mathfrak{B}}{[\,.\,]}$, so muß dieser Ausdruck immer gleich $\frac{\Omega}{2}$, also gleich einer Konstanten sein.

Für $T_0 = 540$ erhält man die Werte der folgenden Tabelle.

T	x	y	$\mathfrak{B}$ (cm³)[1])	$\mathfrak{B}\,y$
153.9	3,510	— 4,86	— 80,7	16,6
193.2	3,304	— 4,08	— 72,3	17,7
170.6	3,162	— 3,60	— 65,1	18,1
180.0	2,900	— 2,82	— 53,9	19,1
215.4	2,506	— 1,87	— 37,2	19,9
273.1	1,977	— 0,916	— 16,6	18,1
293.5	1,840	— 0,712	— 12,6	17,1

1) H. Kamerlingh Onnes, Comm. of Leiden Laboratory Nr. 102, 1907.

Als mittleren Wert nehmen wir $\mathfrak{B} = 18{,}2 \cdot y(x)$.

Daraus berechnet sich der Atomdurchmesser zu $d = 2{,}43 \cdot 10^{-8}$ cm.

Aus $T_0 = \frac{3\alpha r^2}{\varkappa d^3}$ wird $r = 1{,}05 \cdot 10^{-26}$. Dabei ist zur Bestimmung von d die Molekularrefraktion $P_0 = 4{,}17$ benutzt worden.

$$P_0 = \frac{4\pi}{3} N\alpha.$$

Wie aus obiger Tabelle ersichtlich, ist die Übereinstimmung mit dem Experiment quantitativ noch keine sehr gute, da Differenzen bis zu 20 Proz. auftreten. Das kann daran liegen, daß den abstoßenden Kräften der Atome durch Zugrundelegung starrer Moleküle nicht richtig Rechnung getragen wird. Dieser Punkt soll im letzten Teil der Arbeit für Helium ausgearbeitet werden. Ein zweiter Fehler könnte darin seinen Ursprung haben, daß wir das Atom als elektrisches System nicht durch einen Quadrupol charakterisieren können. Einen Anhaltspunkt in dieser Richtung geben die Messungen von Cabannes und Strutt über die Polarisation seitlich zerstreuten Lichtes. Wenn die Elektronen eines Moleküls nicht nach allen Richtungen gleich gebunden sind, so haben wir für das im elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ entstehende Moment $\mathfrak{m}$ die Gleichungen

$$\mathfrak{m}_x = \alpha_{11}E_x + \alpha_{12}E_y + \alpha_{13}E_z$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Durch Transformation auf Hauptachsen können wir die obigen neun Konstanten auf drei reduzieren, durch welche das Molekül in optischer Hinsicht charakterisiert wird. Es läßt sich nun theoretisch zeigen, daß unter 90° nach der Seite zerstreutes Licht nur dann vollständig polarisiert ist, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Dieser Fall ist nach Cabannes und Strutt bei Argon realisiert.

Man kann nun vermuten, daß wenn die Elektronen gegenüber äußeren elektrischen Kräften nach allen Seiten gleich reagieren, auch ihre räumliche Lagerung eine möglichst symmetrische sei. Ist diese Überlegung richtig, so müßte sich das Argon am besten durch einen Oktupol charakterisieren lassen, d. h. es dürften in der Potentialentwicklung in einem Aufpunkt (siehe Gleichung 3).

$$\varphi = \frac{\Sigma e}{r} + \cdots$$

erst die Glieder $\frac{\Sigma e_x \xi_x^4}{r^5}$ usw. auftreten. Das einfachste Modell eines Oktupols ist ein Würfel, in dessen Ecken je eine negative und in dessen Zentrum acht positive Ladungen e sitzen. Damit

wollen wir die Zustandsgleichung von Argon noch einmal berechnen.

Legen wir ein Koordinatensystem parallel den Würfelkanten des Oktupols, mit dem Nullpunkt im Zentrum desselben, so ist das Potential in einem Aufpunkt (xyz)

$$\varphi(x,y,z) = \frac{8e}{r} - \sum_{i=1}^{8} \frac{e}{r_i}$$

(r_i ist der Abstand des Aufpunktes von der $i$ten Würfelecke).

Setzt man r_i in Koordinaten ein, so wird

$$\varphi = \frac{3\mu}{8r^5} - \frac{35}{8}\frac{\mu}{r^9}\left\{x^4+y^4+z^4+6x^2y^2+6y^2z^2+6z^2x^2\right\} \quad (12)$$

Wenn mit μ bezeichnet ist, die den Oktupol charakterisierende Größe

$$\mu = \sum e_x \xi_x^4 = \sum e_x y_x^4 = \sum e_x z_x^4 = -8a^4 e$$

a = halbe Kantenlänge des Würfels.

Daraus berechnen wir durch Differentiation die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ im Abstand r vom Atomzentrum. Darauf bilden wir $\mathfrak{E}^2$ und mitteln dieses über die Kugel r. Dann ist die mittlere potentielle Energie des durch Polarisation entstandenen Dipoles

$$u = -\frac{\alpha}{2}\mathfrak{E}^2.$$

Für den obigen Fall erhält man

$$u = -\frac{63405}{8}\frac{\mu^2\alpha}{r^{12}} = -c\frac{\mu^2\alpha}{r^{12}}.$$

Es gilt für B wieder

$$B = RT\frac{N\omega}{2} + RT\frac{NJ}{2},$$

wobei

$$-\frac{J}{4\pi} = \int_{r=a}^{\infty}\left\{e^{\left(\frac{\varphi}{r}\right)^n} - 1\right\} r^2 dr$$

und

$$\varphi^{12} = c\frac{\alpha\mu^2}{kT}.$$

Es wird

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{RT} = \frac{\Omega}{2}\left[1 - \frac{1}{3}\frac{T_0}{T} - \frac{1}{14}\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 - \frac{1}{66}\left(\quad\right)^3 - \frac{1}{360}\left(\quad\right)^4 - \frac{1}{2280}\left(\quad\right)^5 - \frac{1}{16560}\left(\quad\right)^6 - \ldots\right] = \frac{\Omega}{2}y. \quad (11)$$

Für die Temperatur T_B des Boylepunktes ($B = 0$) besteht dann die Gleichung

$$\frac{T_0}{T_B} = 1{,}847, \quad T_0 = C\frac{\alpha\mu^2}{\varkappa d^{12}}$$

und eine analoge für die Temperatur T_i des Inversionspunktes

$$\frac{T_0}{T_i} = 1{,}030$$

und daraus

$$\frac{T_B}{T_i} = 0{,}558.$$

Leider sind auch diese Beziehungen aus dem früher genannten Grunde nicht zu verwerten. Für hohe Temperaturen ist wieder dieselbe Entwicklung wie im frühern Falle brauchbar.

Die Anpassung der theoretischen Kurve für $\mathfrak{B}$ an die experimentelle wurde nun versucht mit den Werten $T_0 = 820$, 800, 780, 760. Es ergab sich relativ die beste Übereinstimmung für $T_0 = 780$. Die Zahlen sind für diesen Fall in der Tabelle wiedergegeben.

T	x	y	$\mathfrak{B}$	$\frac{\Omega}{2}$
153,9	5,06	— 10,15	— 80,7	7,95
195,2	4,91	— 8,92	— 72,3	8,10
170,6	4,57	— 6,69	— 65,1	9,73
186,0	4,19	— 4,82	— 53,9	11,2
215,4	3,62	— 2,81	— 37,2	13,2
273,1	2,86	— 1,21	— 16,6	13,7
293,5	2,66	— 0,91	— 12,6	13,8

$$\mathfrak{B} = 11{,}1 \cdot y.$$

Daraus wird

$$\mu = 2{,}05 \cdot 10^{-12}, \quad d = 2{,}96 \cdot 10^{-8}$$

und die halbe Kantenlänge

$$a = 0{,}507 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}.$$

Die Würfeldiagonale hat die Länge

$$a\sqrt{3} = 0{,}92 \cdot 10^{-8}\ \text{cm},$$

also beinahe die Größe des Atomdurchmessers.

Wie sich aus der Tabelle ergibt, ist die Übereinstimmung für Oktupole mit der Erfahrung viel schlechter, als wenn wir mit Quadrupolen rechnen. Wir kämen also zu dem merkwürdigen Resultat, daß Argon in optischer Hinsicht vollständig kugelsymmetrisch ist, trotzdem es einen unsymmetrischen Bau aufweist. Völlig zwingend ist dieser Schluß aber nicht. Leider können wir die im folgenden für Helium entwickelte genauere Theorie auf Argon noch nicht anwenden, da für dieses keine Fixpunkte der B-Kurve (Boyle-, Inversionspunkt) vorliegen. Ohne Kenntnis dieser Punkte hat aber eine Prüfung der Theorie an Argon keinen Sinn, weil wir mit den drei auftretenden Konstanten immer imstande wären, das kurze Kurvenstück, das bei Argon bekannt ist, schon sehr genau zu approximieren. Theoretisch ergibt sich:

Boylepunkt liegt für Hypothese 1) bei 437°.
" " " " 2) " 426° abs.

Er liegt also bei einer Temperatur, die wahrscheinlich experimentell relativ leicht bestimmt werden könnte.

§ 2. Zustandsgleichung von Helium.

Der Virialkoeffizient $\mathfrak{B}$ hat hier insofern einen besonderen Temperaturverlauf als er oberhalb des Boylepunktes ein Maximum aufweist. Wenn wir nun an der Starrheit der Moleküle festhalten, so bekommen wir für $\mathfrak{B}$ immer einen Ausdruck von der Form

$$\mathfrak{B} = \frac{\Omega}{2}\left[1 - \int_0^\infty \left(1 - e^{-\frac{u(r)}{\varkappa T}}\right) r^2\, dr\right],$$

oder nach Entwicklung der Exponentialfunktion und Integration

$$\mathfrak{B} = \frac{\Omega}{2}\left[1 - P\left(\frac{T_0}{T}\right)\right] \qquad T_0 = \text{const.}$$

Wie man leicht sieht, ist P eine Potenzreihe vom Argument $\frac{T_0}{T}$ mit lauter positiven Koeffizienten. Dabei ist noch angenommen, daß zwei Moleküle sich nach einem beliebigen kugelsymmetrischen Kraftgesetz anziehen. $u(r)$ ist die daraus resultierende potentielle Energie. Die obige Funktion $\mathfrak{B}$ nimmt nun aber mit wachsender Temperatur monoton zu. Wir erzielen daher auf Grund der genannten Voraussetzungen bei Helium nicht einmal einen qualitativen Anschluß an die Erfahrung. Um diesen zu erreichen, müssen wir die Starrheit der Atome aufgeben und an deren Stelle ein abstoßendes Kraftfeld einführen. Physikalisch bedeutet das, daß bei einem starken Stoß zweier Atome die Zentren derselben sich einander mehr nähern als bei einem schwachen. Wir definieren als mittleren Durchmesser d_m bei der Temperatur T etwa folgende Größe. Ein Atom mit der kinetischen Energie $\varkappa T$ ($\varkappa = 1{,}3 \cdot 10^{-16}$ erg) stoße zentral auf ein zweites ruhendes. Der kleinste erreichte Abstand der Atommittelpunkte, welcher bei diesem Vorgang erreicht wird, ist d_m. Es ist aus dem vorigen klar, daß d_m eine abnehmende Funktion der Temperatur ist. Eine Abnahme des Durchmessers bedeutet aber auch eine Verkleinerung des Virialkoeffizienten. Wir haben also die Möglichkeit, dem $\mathfrak{B}$ auf diese Art ein Maximum zu erteilen.

Die genannten abstoßenden Kräfte sollten sich natürlich aus der elektrischen Konstitution der Moleküle erklären lassen. Ein erster prinzipieller Schritt in dieser Richtung ist von Debye[1]) getan worden, indem er zeigte, daß elektrische Ladungen in zeitlich veränderlichen und inhomogenen elektrischen Feldern abstoßende Kräfte erfahren.

Bei Helium ist die Sachlage für die Erforschung der abstoßenden Kräfte außerordentlich günstig infolge der tiefen kritischen Temperatur, d. h. der kleinen anziehenden Energie. Es würde sich hier darum handeln, die Debyeschen Überlegungen, welche ganz allgemein gelten, auf unsern Fall treffend zu spezialisieren. Da dies aber bis jetzt nicht geschehen ist, müssen wir uns damit begnügen, für die potentielle Energie u_2 der Abstoßung zweier *He*-Atome einen phänomenologischen Ansatz zu machen. Wir setzen

$$u_2 = \frac{A}{r^p},$$

wobei A und p unbekannte, aus den Messungen zu ermittelnde Konstanten sind.

Dieser Ansatz entspricht dem Vorgehen Borns beim Aufbau der Kristallgitter. Rechnen wir wieder mit elektrischen Quadrupolen, so ist die Anziehungsenergie nach wie vor

$$u_1 = -\frac{3\alpha\tau^2}{r^8}.$$

Die Gesamtenergie U wird also

$$U = u_1 + u_2 = -\frac{3\alpha\tau^2}{r^8} + \frac{A}{r^p} \qquad (14)$$

Wir bilden wieder wie früher das Zustandsintegral

$$Z = \Theta^N \int_{\text{alle Lagen}} e^{-\frac{u_1+u_2}{\varkappa T}}\, dS, \qquad \Theta = \sqrt{2\pi m k T}$$

wobei

$$dS = \prod_{i=1}^{N} dx_i\, dy_i\, dz_i$$

gesetzt ist und $x_i y_i z_i$ die Lagekoordinaten (rechtwinklige cartesische) sind. Unter Voraussetzung mäßiger Verdünnung bekommen wir wie früher

$$Z = \Theta^N [v - J][v - 2J][\ldots\ ][v - (N-1)J],$$

$$J = 4\pi \int_0^\infty \left[1 - e^{\left(\frac{3\alpha\tau^2}{r^8} - \frac{A}{r^p}\right)\frac{1}{\varkappa T}}\right] r^2\, dr.$$

Die freie Energie wird

$$F = -\varkappa T \log Z = -\varkappa T N \log \Theta - \varkappa T N \log v + \\ + kT\frac{N-1}{2} N\frac{J}{v} + \ldots$$

$$\frac{pv}{NxT} = \frac{pv}{RT} = 1 + \frac{N}{2} J \frac{1}{v} + \ldots$$

und daraus der zweite Virialkoeffizient aus Vergleich mit der empirischen Gleichung (5)

$$\mathfrak{B} = \frac{N}{2} J = \frac{N}{2} 4\pi \int_0^\infty \left[1 - e^{-\frac{u_1+u_2}{\varkappa T}}\right] r^2\, dr.$$

1) P. Debye, diese Zeitschr. **22**, 302, 1921.

Zur Auswertung spalten wir dieses Integral in zwei Teile

$$\int_0^{d_0} [\ldots] r^2 dr \text{ und } \int_{d_0}^{\infty} [\ldots] r^2 dr.$$

d_0 ist der Durchmesser der Atome beim absoluten Nullpunkt. Er berechnet sich durch Gleichsetzung der Anziehungs- und Abstoßungsenergie

$$\frac{3\alpha\tau^2}{d_0^8} = \frac{A}{d_0^p}.$$

Führen wir noch die Substitution $r = d_0\eta$ ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{B} = 2\pi N d_0^3 \left| \frac{1}{3} - J_1 + J_2 \right| \qquad \frac{4\pi}{3} d_0^3 N = \Omega.$$

$$J_1 = \int_0^1 e^{\frac{3\alpha\tau^2}{d_0^8 \varkappa T}\left(\frac{1}{\eta^8} - \frac{1}{\eta^p}\right)} \eta^2 d\eta \qquad (15)$$

$$J_2 = \int_1^{\infty} \left| 1 - e^{\frac{3\alpha\tau^2}{\varkappa T d_0^8}\left(\frac{1}{\eta^8} - \frac{1}{\eta^p}\right)} \right| \eta^2 d\eta.$$

Zur weitern numerischen Ausrechnung muß man nun für p irgendeine Annahme treffen. Es wurde probiert mit $p = 9$, 10, 12. Von ganzen Zahlen ergab sich, daß $p = 9$ am besten mit der Erfahrung übereinstimmt. Setzen wir $p = 9$ und bezeichnen mit x die Größe

$$\frac{T_0}{T} = \frac{3\alpha\tau^2}{\varkappa d_0^8} \frac{1}{T} = x.$$

Das Integral y_2 ist leicht auszuwerten durch Reihenentwicklung der Exponentialfunktion und nachherige Integration. Man findet

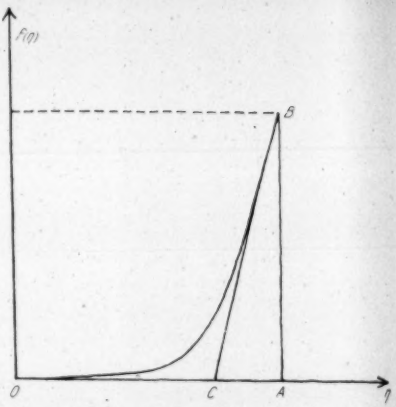
$$J_2 = -[0{,}0334\, x + 0{,}002 \ldots x^2 + + 0{,}003 \ldots x^3 + \ldots]$$

J_1 können wir nicht auf diese Weise behandeln, da die Grenze $\eta = 0$ Schwierigkeiten bereitet. Hingegen können wir dasselbe leicht graphisch lösen. Der Integrand

$$f(\eta) = e^{x\left(\frac{1}{\eta^8} - \frac{1}{\eta^9}\right)} \eta^2$$

wird gleich eins für $\eta = 1$ und fällt gegen $\eta = 0$ sehr rasch gegen Null ab. Die graphische Aufzeichnung ergibt, daß folgende Näherung bei der von uns benötigten Genauigkeit hinreichend ist. Man zieht im Punkt $\eta = 1$ die Tangente an die Kurve und schneidet sie mit der η-Achse bei C. Das Dreieck ABC gibt für die bei He bekannten numerischen Werte die Fläche OAB mit etwa 1 Proz. Genauigkeit wieder. Wir setzen also

$$J_1 \sim \triangle(ABC) = \frac{1}{2f'(1)}.$$



$OA = AB = 1.$

Es ist

$$f'(\eta) = \left[-x\left(\frac{8}{\eta^9} - \frac{9}{\eta^{10}}\right)\eta^2 + 2\eta \right] e^{x\left(\frac{1}{\eta^8} - \frac{1}{\eta^9}\right)},$$

$$f'(1) = x + 2.$$

Also

$$J_1 \sim \frac{1}{2(x+2)}.$$

Wir berechnen nun x_B, für welches $\mathfrak{B} = 0$ wird. Es folgt dann $T_0 = x_B \cdot T_B$. Nach Kamerlingh Onnes[1]) ist $\mathfrak{B}$ bei 20° abs. schon ein wenig negativ. Ich probierte daher mit Boylepunkten bei $T_B = 23°$, 25° und 28°. Die besten Resultate wurden erzielt für $T_B = 25°$. Die zugehörigen Zahlen sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

T	x	$\mathfrak{B}_{cm^3}$	$\frac{3\Omega}{2}$
56,5	3,85	10,4	86
90,3	2,41	11,9	84,5
169,5	1,34	12,15	89
273,1	0,80	11,48	89
293,1	0,74	11,16	85,7
373,4	0,58	11,0	89,5

$x_B = 0{,}865$
$T_0 = 217{,}5$

Es folgt für den Durchmesser beim absoluten Nullpunkt

$$d_0 = 2{,}78 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Für die Kombination τ der elektrischen Trägheitsmomente gilt die Formel

$$\tau^2 = \frac{T_0 \varkappa d_0^8}{3\alpha} = \frac{T_0 \varkappa d_0^8}{3} \cdot \frac{4\pi N}{3P_0}.$$

1) H. Kamerlingh Onnes, Communications of Leiden Laboratory, Nr. 102, 1907.

Mit P_0 ist die Molekularrefraktion $P_0 = 0{,}52$ bezeichnet. Ausgerechnet gibt das

$$\tau = 1{,}32 \cdot 10^{-26}\, g^{1/2} cm^{7/2} sec^{-1}.$$

Die Theorie fordert, daß Ω eine Konstante sei. Die Tabelle zeigt, daß der Vergleich mit den experimentellen Resultaten nur ganz kleine Abweichungen gibt, so daß die Übereinstimmung als eine sehr gute bezeichnet werden kann. Die geringen Unstimmigkeiten könnten vielleicht ihren Grund im folgenden haben. Wir haben nur probiert mit ganzen Zahlen für p. Es wäre aber ganz gut möglich, daß der beste Wert für p entweder zwischen 8 und 9, oder zwischen 9 und 10 liegt. Weiter haben wir noch eine Vernachlässigung prinzipieller Natur dadurch begangen, daß wir angenommen haben, daß *He*-Atom sei durch einen Quadrupol in elektrischer Hinsicht hinreichend dargestellt. Das braucht aber durchaus nicht der Fall zu sein. Gerade in dem wichtigen Fall, wo zwei Atome sehr nahe beieinander sind, werden auch die höhern Glieder in der Entwicklung (3) für das Potential φ in Betracht kommen. Aus diesen Gründen ist eine noch bessere Übereinstimmung mit dem Experiment gar nicht zu erwarten.

Um noch die Veränderlichkeit des Durchmessers mit der Temperatur zu demonstrieren, kann man denselben z. B. für die Temperatur $T = 293^0$ oder 20^0 C berechnen. Man erhält

$$d_{293} = 0{,}81\, d_0.$$

Die vorliegende Arbeit ist aus Besprechungen mit Herrn Prof. Debye hervorgegangen.

Zürich, Physik. Institut der Eidg. Techn. Hochschule, 1. Juli 1921.

(Eingegangen 5. Juli 1921.)

Raum-Zeit-Symmetrie [1]).

Von N. H. Kolkmeijer.

§ 1. Einleitung. Sobald in einem geometrisch-symmetrischen Gebilde Bewegungen der das Gebilde zusammenstellenden Teile in Betracht gezogen werden, kann man auf den Gedanken kommen, den dreidimensionalen Begriff der Raum-Symmetrie zu dem vierdimensionalen einer Raum-Zeit-Symmetrie zu verallgemeinern.

In einer Arbeit [1]) über die Existenz der „Verbindungsringe" im Diamant wurde ich veranlaßt, bestimmte Voraussetzungen über die Bewegungen der Elektronen in diesen Ringen zu machen. Dieselben verleihen dem *C*-Atom im Diamant eine bestimmte R.-Z.-Symmetrie. Wenn nun auch das Ergebnis der Prüfung dieser besonderen Voraussetzungen denselben nicht günstig ist, so befürworten noch immer die Arbeiten von Landé und Madelung [2]) die Vorstellung eines R.-Z.-symmetrischen Baus der Kern-Elektronen-Konfiguration des Atoms im allgemeinen. Auch der Erfolg des Sommerfeldschen Ellipsenvereins [3]) war schon ein Beispiel für die Nützlichkeit R.-Z.-symmetrischer Betrachtungen über die Atomstruktur.

Es dürfte vielleicht auch für die Kristallstrukturlehre empfehlenswert sein, die R.-Z.-Symmetrielehre einmal ebenso systematisch aufzubauen, wie es für die R.-Symmetrielehre Bravais [4]), Sohncke [5]) und Schoenflies [6]) gemacht haben. In der vorliegenden Arbeit habe ich dieses Problem teilweise zu lösen gesucht.

I. Die R.-Z.-Deckoperationen.

§ 2. Die Eigenschaften der R.-Z.-Deckoperationen. Im Folgenden werden wir eine Deckoperation angeben mit Δ, eine zusammengesetzte Δ^7) mit $\Delta\Delta$, die Identität mit 1, eine Spiegelung an einer Symmetrieebene mit $\mathfrak{S}$, eine Inversion mit $\mathfrak{J}$, eine Drehung von $\frac{2\pi}{n}$ Rad. um eine Achse mit $\mathfrak{A}_n$, eine Drehspiegelung mit $\overline{\mathfrak{A}}_n$, eine Translation mit $\mathfrak{T}$, eine Gleitspiegelung mit $\overline{\mathfrak{T}}$, eine Schraubenbewegung mit $\mathfrak{X}_n$, die zugehörigen Symmetrieelemente, soweit angängig mit den kleinen Buchstaben.

Das sind die Δ, welche Schönflies betrachtet. Sie haben die folgenden Eigenschaften gemeinsam:

1. Die diesen Δ entsprechenden Substitutionen sind linear-orthogonal-dreidimensional (x^1, x^2, x^3).

2. Man kann die Δ alle (natürlich mit Ausnahme der $\mathfrak{S}$ selbst) betrachten als $\Delta\Delta$ von $\mathfrak{S}$

1) Diese Arbeit ist eine Zusammenfassung und Erweiterung der Betrachtungen (jedoch nicht unwesentlich abgeändert) in einigen Arbeiten, welche als Comm. No. 7 from the Lab. of Ph. and Ph. Chem. of the Vet. Coll. at Utrecht in den Proc. Amst. **24**, 1921 erschienen sind.

1) N. H. Kolkmeijer, Comm. No. 4 from the Lab. of Ph. and Ph. Chem. of the Vet. Coll. at Utrecht, Proc. Amst. **23**, 120, 1920.

2) A. Landé, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 101, 1919; Verhandl. d. D. Phys. Ges. **21**, 2, 644, 653, 1919; Zeitschr. f. Phys. **2**, 83, 1920; E. Madelung u. A. Landé, Zeitschr. f. Phys. **2**, 230, 1920.

3) A. Sommerfeld, diese Zeitschr. **19**, 297, 1918.

4) A. Bravais, Etudes cristallographiques. Paris 1866.

5) L. Sohncke, Theorie der Kristallstruktur. Leipzig 1879.

6) A. Schoenflies, Kristallsysteme und Kristallstruktur. Leipzig 1891.

7) Das heißt eine $\Delta\Delta$, wie z. B. eine Drehspiegelung.

an einigen $\mathfrak{S}$. Das haben schon Schoenflies[1]), Viola[2]) und Wulff[3]) benützt. Den Fall der $\mathfrak{J}$ ausgenommen, ergeben die verschiedenen Reihenfolgen der $\mathfrak{S}$ auch verschiedene Δ.

1. und 2. bringen mit sich, daß aus einer Figur, wenn man darauf diese Δ anwendet, nur eine kongruente oder symmetrische Figur entsteht.

3. Die verschiedenen Potenzen einer Δ ergeben bei ihrer Anwendung auf einen Ausgangspunkt A nie unendlich viele Punkte in einem endlichen Raum, den unbedeutenden Fall $n = \infty$ ausgenommen.

Wenn man nun die Zeit t oder $ict = x^4$ als vierte Koordinate einführt, so liegt es auf der Hand, den R.-Z.-Δ als Eigenschaften die vierdimensionalen Analoga der vorangehenden Eigenschaften beizulegen. Wir werden diese Analoga in den folgenden Paragraphen näher erörtern.

§ 3. Einführung der R.-Z.-Spiegelung. Als Analogon der $\mathfrak{S}$ in 2. wird man dann wählen eine „R.-Z.-Spiegelung" (Symbol $\mathfrak{R}$, Name und Symbol des betreffenden Symmetrieelements „Symmetrieraum"[4]) und r).

Ein Punktsystem in R_4 besitzt als Δ eine $\mathfrak{R}$, wenn ein dazu gehöriges Punktereignis $A_1 (x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_1^4)$ mit sich bringt das Punktereignis $A_2 (x_2^1, x_2^2, x_2^3, x_2^4)$, welches man erhält, wenn man A_1 an einem dreidimensionalen Raum r spiegelt.

Die zugehörige Substitution ist, wenn man für n 1, 2, 3 und 4 stellt:

$$x_2^n = x_1^n + 2\varphi_1^n (l_1 - \varphi_1^1 x_1^1 - \varphi_1^2 x_1^2 - \varphi_1^3 x_1^3 - \varphi_1^4 x_1^4). \quad (1)$$

Dabei ist l_1 die Länge des Lots aus dem Anfangspunkt des R_4 auf r gefällt und sind $\varphi_1^1, \varphi_1^2, \varphi_1^3, \varphi_1^4$ die Richtungscosinus dieses Lots, also:

$$\varphi_1^{1^2} + \varphi_1^{2^2} + \varphi_1^{3^2} + \varphi_1^{4^2} = 1. \quad (2)$$

Wenn man in einem dreidimensionalen System Punkte $A_1' (x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ und $A_2' (x_2^1, x_2^2, x_2^3)$ wählt, deren Koordinaten den betreffenden von A_1 und A_2 im vorangehenden gleich sind, und eine Ebene V durch den Anfangspunkt dieses Systems legt, deren Normal Richtungscosinus hat, welche $\varphi_1^1, \varphi_1^2, \varphi_1^3$ proportional sind, so liegen A_1' und A_2' auf demselben Lot auf V, denn für $n = 1$, 2 und 3 bzw. ist $x_2^n - x_1^n$ proportional φ_1^n.

Nennt man den Abstand des Punktes A' von V — y, so ist für $n = 1$ und 2 bzw.

$$y_m = \frac{\varphi_1^1 x_m^1 + \varphi_1^2 x_m^2 + \varphi_1^3 x_m^3}{\sqrt{1 - \varphi_1^{1^2}}}. \quad (3)$$

und also:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 2\sqrt{1 - \varphi_1^{1^2}}\,(l_1 - \sqrt{1 - \varphi_1^{1^2}}\, y_1 - \varphi_1^1 x_1^1), \\ x_2^1 &= x_1^1 + 2\varphi_1^1 (l_1 - \sqrt{1 - \varphi_1^{1^2}}\, y_1 - \varphi_1^1 x_1^1). \end{aligned} \quad (4)$$

Das heißt: Wenn man jetzt in einem zweidimensionalen System (x^4, y) den Punkt A_1'' (x_1^4, y_1) zeichnet, eine Gerade so zieht, daß das Lot aus dem Koordinatenanfang darauf gefällt, die Länge l_1 hat und mit der x_4-Achse einen Winkel einschließt, dessen Cosinus φ_1^1 gleich ist und schließlich A_1'' an dieser Geraden nach A_2'' spiegelt, so geben die Koordinaten von A_2'' die neuen Werte der Zeit und des Abstandes des Punktes A_2' von V im dreidimensionalen System und dann also auch die Stelle des Punktes A_2 im vierdimensionalen System.

Es ist einleuchtend, daß man alle denkbaren R.-Z.-Δ kennen lernt, wenn man alle verschiedenartigen $\Delta\Delta$ aufsucht, welche aus einigen $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ usw. zusammengesetzt sind.

§ 4. Allgemeine Substitutionsformel für die R.-Z.-$\Delta\Delta$. Es sei hier ohne Ableitung die Substitutionsformel für eine R.-Z.-$\Delta\Delta$, welche (in einer bestimmten Reihenfolge) zusammengesetzt ist aus $\mathfrak{R}_1$ $(l_1, \varphi_1^1, \varphi_1^2, \varphi_1^3, \varphi_1^4)$, $\mathfrak{R}_2$ $(l_2, \varphi_2^1, \varphi_2^2, \varphi_2^3, \varphi_2^4)$ usw. angegeben.

$$x_m^n = x_0^n + 2\sum_{k=1}^{k=m} \Big[(l_k - \varphi_k^1 x_0^1 - \varphi_k^2 x_0^2 - \varphi_k^3 x_0^3 - \varphi_k^4 x_0^4) \Big\{ \varphi_k^n + \sum_{l=k+1}^{l=m} \Big(\varphi_l^n \Big[(l,k) + \Sigma (l,p)\,(p,k) + \Sigma (l,p)\,(p,q)\,(q,k) + \ldots \Big] \Big) \Big\} \Big]. \quad (5)$$

wo (p, q) ein Zeichen ist für:

$$-2(\varphi_p^1 \varphi_q^1 + \varphi_p^2 \varphi_q^2 + \varphi_p^3 \varphi_q^3 + \varphi_p^4 \varphi_q^4)$$

und $l > p > q > k$ usw. zu wählen ist.

§ 5. Das Analogon zu 3. in § 2. Eine neue Eigenschaft der R.-Z.-Δ. Man kann den Wortlaut von 3. hier unverändert beibehalten, und nur unter Raum jetzt verstehen vierdimensionalen Raum. Das kann man auch so sagen: Im gleichen Moment sollen nicht unendlich viele der erhaltenen Punkte in einem endlichen Raum kommen und an derselben Stelle sollen dieselben im allgemeinen auch nicht vorkommen in unendlich benachbarten Zeitpunkten. Dabei ist der hier uninteressante Fall der Ruhe der Punkte ausgenommen.

Wir wollen jetzt den R.-Z.-Δ noch eine Eigen-

1) A. Schoenflies, l. c.
2) C. Viola, Zeitschr. f. Kristallographie **27**, 1, 1896.
3) G. Wulff, Zeitschr. f. Krist. u. Min. **27**, 566, 1896.
4) Diesen Namen hat schon P. H. Schoute, Verh. Kon. Ak. Amst., eerste Sectie II 7, S. 16, 1894 benutzt.

schaft beilegen, deren Analogon in der Raumsymmetrielehre nicht besteht. Wenn nämlich in der Formel (5) die Koeffizienten der x_1^4 in den Ausdrücken für x_1', x_2' und x_3' nicht verschwinden, so entfernt sich allmählich der einem Punkte A_1' nach der betrachteten R.-Z.-$\mathcal{A}$ entsprechende Punkt A_2' (beide im dreidimensionalen Raum) immer mehr ins Unendliche, wenn auch A_1' in Ruhe verharrt. Diese Eigenschaft der R.-Z.-$\mathcal{A}$ wäre wohl eine unerwünschte. Bei einer willkürlichen einfachen $\mathfrak{R}$ ist sie nicht zu vermeiden, wohl aber bei einer aus einigen $\mathfrak{R}$ zusammengesetzten $\Delta\Delta$. Wir werden also festsetzen:

4. Wenn die Weltlinie eines Punktes A_1 der x^4-Achse parallel läuft, so soll auch die Weltlinie des aus A_1 durch Anwendung einer R.-Z.-$\mathcal{A}$ entstehenden Punktes A_2 der x^4-Achse parallel laufen.

§ 6. Die Folge der Beschränkung 4. Die lineare orthogonale Substitution (5) habe das Koeffizientenschema:

$$\begin{array}{l} {}_1a_1\ {}_1a_2\ {}_1a_3\ {}_1a_4\ {}_1a_5, \\ {}_2a_1\ {}_2a_2\ {}_2a_3\ {}_2a_4\ {}_2a_5, \\ {}_3a_1\ {}_3a_2\ {}_3a_3\ {}_3a_4\ {}_3a_5, \\ {}_4a_1\ {}_4a_2\ {}_4a_3\ {}_4a_4\ {}_4a_5. \end{array}$$

Zwischen diesen Koeffizienten bestehen die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} {}_1a_1^2 + {}_2a_1^2 + {}_3a_1^2 + {}_4a_1^2 = 1, \\ {}_1a_2^2 + {}_2a_2^2 + {}_3a_2^2 + {}_4a_2^2 = 1, \\ {}_1a_3^2 + {}_2a_3^2 + {}_3a_3^2 + {}_4a_3^2 = 1, \\ {}_1a_4^2 + {}_2a_4^2 + {}_3a_4^2 + {}_4a_4^2 = 1. \end{array}\right\} \quad (6)$$

und

$$\left.\begin{array}{l} {}_1a_1\,{}_1a_2 + {}_2a_1\,{}_2a_2 + {}_3a_1\,{}_3a_2 + {}_4a_1\,{}_4a_2 = 0, \\ {}_1a_1\,{}_1a_3 + {}_2a_1\,{}_2a_3 + {}_3a_1\,{}_3a_3 + {}_4a_1\,{}_4a_3 = 0, \\ {}_1a_1\,{}_1a_4 + {}_2a_1\,{}_2a_4 + {}_3a_1\,{}_3a_4 + {}_4a_1\,{}_4a_4 = 0, \\ {}_1a_2\,{}_1a_3 + {}_2a_2\,{}_2a_3 + {}_3a_2\,{}_3a_3 + {}_4a_2\,{}_4a_3 = 0, \\ {}_1a_2\,{}_1a_4 + {}_2a_2\,{}_2a_4 + {}_3a_2\,{}_3a_4 + {}_4a_2\,{}_4a_4 = 0, \\ {}_1a_3\,{}_1a_4 + {}_2a_3\,{}_2a_4 + {}_3a_3\,{}_3a_4 + {}_4a_3\,{}_4a_4 = 0. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Zufolge der Beschränkung 4. verschwinden ${}_1a_4$, ${}_2a_4$ und ${}_3a_4$. Substituiert man das in (6) und (7), so findet man

$${}_1a_1^2 = 1 \quad {}_4a_1 = 0 \quad {}_4a_2 = 0 \quad {}_4a_3 = 0, \quad (8)$$

indem von (6) und (7) nur übrig bleibt:

$$\left.\begin{array}{l} {}_1a_1^2 + {}_2a_1^2 + {}_3a_1^2 = 1, \\ {}_1a_2^2 + {}_2a_2^2 + {}_3a_2^2 = 1, \\ {}_1a_3^2 + {}_2a_3^2 + {}_3a_3^2 = 1. \end{array}\right\} \quad (9)$$

und

$$\left.\begin{array}{l} {}_1a_1\,{}_1a_2 + {}_2a_1\,{}_2a_2 + {}_3a_1\,{}_3a_2 = 0, \\ {}_1a_1\,{}_1a_3 + {}_2a_1\,{}_2a_3 + {}_3a_1\,{}_3a_3 = 0, \\ {}_1a_2\,{}_1a_3 + {}_2a_2\,{}_2a_3 + {}_3a_2\,{}_3a_3 = 0. \end{array}\right\} \quad (10)$$

Das heißt, wenn aus dem Punktereignisse A_1 durch Anwendung der R.-Z.-$\mathcal{A}$ das Punktereignis A_2 entsteht, so hängen die Raumkoordinaten und die Zeit von A_2 nur ab von den Raumkoordinaten bzw. der Zeit von A_1; die Raumkoordinatentransformation ist überdies linear orthogonal.

Bei der Ableitung aller R.-Z.-$\mathcal{A}$ braucht man also nur reine Raum-$\mathcal{A}$ zusammenzusetzen mit reinen Zeit-$\mathcal{A}$. Formel (5) wird man dann auch nur anwenden für φ_{mt}^4-Werte $= 0$ (reine Raumtransformation) und φ_{mt}^4-Werte $= 1$ (reine Zeittransformation).

§ 7. Bedeutung der Fälle $\varphi_{mt}^4 = 0$ und $\varphi_{mt}^4 = 1$. Einführung der Retroduktion. Eine $\mathfrak{R}$ mit $\varphi_{mt}^4 = 0$ ist natürlich eine $\mathfrak{S}$.

Eine $\mathfrak{R}$ mit $\varphi_{mt}^4 = 1$ werden wir eine „Retroduktion" (Symbol $\mathfrak{R}$), das betreffende Symmetrieelement ein „Symmetriemoment" (Symbol $\mathfrak{m}$) nennen. Wenn allgemein die folgende Beziehung gilt: wenn in P zur Zeit t ein Teilchen A ist und es gibt dann auch in P ein Teilchen B zur Zeit $2\mathfrak{m} - t$, so sagen wir, das bewegliche System der Teilchen A habe als $\mathcal{A}$ eine Retroduktion mit $\mathfrak{m}$ als Symmetriemoment.

Wenn dann A zur Zeit $t + \Delta t$ in Q ist, so soll zur Zeit $2\mathfrak{m} - t - \Delta t$ in Q auch ein Teilchen sein. Zufolge der Beschränkung 3. schließen wir, daß letzteres Teilchen B sein soll. Also sind die Geschwindigkeiten der Teilchen A und B in P einander gleich und in entgegengesetzter Richtung.

Zur Zeit $\mathfrak{m}$ müssen sich dann an derselben Stelle zwei Teilchen befinden mit entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten. Nehmen wir an, die Teilchen seien undurchdringlich, so müssen die Teilchen A und B identisch sein. Dann sind also alle Teilchen zur Zeit $\mathfrak{m}$ in Ruhe gelangt und laufen nachher in den Bahnen zurück.

Wenn man daran geht, die reinen Raum-$\mathcal{A}$ mit reinen Zeit-$\mathcal{A}$ zusammenzusetzen und z. B. eine $\Delta\Delta$ aus einer $\mathfrak{M}$ und einer $\mathfrak{S}$ betrachtet, so soll man im Vorangehenden den Ausdruck „an derselben Stelle" ändern in „an der an der $\mathfrak{s}$ gespiegelten Stelle". Dann würde das Bedenken wegen der entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten verschwinden, wenn wenigstens nur nicht die Teilchen zur Zeit $\mathfrak{m}$ gerade in der $\mathfrak{s}$ lägen. Wäre dies jedoch der Fall, so würde auch dann noch das Bedenken verschwinden, wenn man die beiden Teilchen als identisch betrachtete. Dann durchsetzt das Teilchen die $\mathfrak{s}$ und die Bahnen vor und nach dem Zeitpunkte $\mathfrak{m}$ sind zur $\mathfrak{s}$ symmetrisch. Ist dann überdies noch die Geschwindigkeit zur Zeit $\mathfrak{m}$ zur $\mathfrak{s}$ senkrecht, so gibt es gar keine Diskontinuität in der Bewegung.

Man kann auf diese Weise auch andere $\Delta\Delta$ untersuchen.

§ 8. Einführung der Dilation. Wenn man die reinen Zeit-Δ betrachtet als spezielle Fälle der $\mathfrak{R}$, kann man aus den Erörterungen des § 3 ersehen, daß man die ersteren alle auffinden muß, wenn man nur alle $\Delta\Delta$ aus $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ usw. aufsucht.

Wir werden die Operation $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ „Dilation" (Symbol $\mathfrak{P}$) nennen (Name und Symbol des zugehörigen Symmetrieelements „Periode" und $\mathfrak{p}$). Ein aus Teilchen bestehendes System besitzt als Δ eine $\mathfrak{P}$, wenn allgemein die Beziehung gilt, daß wenn in P ein Teilchen A_1 ist zur Zeit t, es in P auch ein Teilchen A_2 gibt zur Zeit $\mathfrak{p}+t$, $\mathfrak{p}=2(\mathfrak{m}_2-\mathfrak{m}_1)$. Dann kommen an P jedesmal nach Ablauf einer Zeit $\mathfrak{p}$ Teilchen vorüber. Ist die Anzahl der Teilchen nicht unendlich groß, so kommt also einmal wieder Teilchen A in P an und hat daselbst dieselbe Geschwindigkeit als es das erste Mal hatte und als alle an P vorübergehenden Teilchen hatten. Man sieht das sogleich, wenn man den Zustand zur Zeit $t+\Delta t$ in Betracht zieht. Alle Teilchen sind also in verschiedenen Anzahlen verteilt über verschiedentlich geformte geschlossene Bahnen, in denen sie mit für alle Bahnen gleichen und in jeder Bahn auch unter sich gleichen Phasenunterschieden umlaufen. Die Umlaufzeiten in zwei Bahnen sind den Anzahlen der darin laufenden Teilchen proportional.

Setzt man eine $\mathfrak{P}$ mit einer Raum-Δ, z. B. einer Drehung von $\frac{2\pi}{n}$ um eine Achse $\mathfrak{a}_n$ zu einer $\Delta\Delta$ zusammen, so sind die n-Bahnen, welche durch $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_n^2$ usw. aus einer derselben hervorgehen alle geschlossene; in jeder derselben laufen gleich viele Teilchen, welche $\frac{2\pi}{n}$ Phasenunterschied mit denen der nächstvorangehenden Bahn haben.

Hierbei tritt ein Unterschied ein, welcher dem Unterschiede zwischen links und rechts gewundenen Schrauben analog ist, je nachdem dem positiven Drehungssinne eine positive oder eine negative Dilation zugeordnet wird.

§ 9. $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$ sind die einzigen Zeit-Δ-Arten[1]). Wenn nämlich $\ldots\ldots\mathfrak{M}_4\mathfrak{M}_3\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_1$ eine Δ eines Systems ist, so soll, wenn im Punkte P zur Zeit t ein Teilchen ist, daselbst auch ein Teilchen sein zur Zeit

$$2\mathfrak{m}_1-2\mathfrak{m}_2+2\mathfrak{m}_3-2\mathfrak{m}_4+\ldots\ldots\pm t.$$

Dabei gilt das Pluszeichen wenn die Anzahl der $\mathfrak{M}$ gerade ist und dann ist die $\Delta\Delta$ einer $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{p}=2\mathfrak{m}_1-2\mathfrak{m}_2+\ldots$ äquivalent; ist diese Anzahl ungerade, so gilt das Minuszeichen und ist die $\Delta\Delta$ einer $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_1-\mathfrak{m}_2+\ldots$ äquivalent.

Man findet also alle R.-Z.-Δ, wenn man die in § 2 genannten R.-Δ entweder mit einer $\mathfrak{M}$ oder mit einer $\mathfrak{P}$ multipliziert.

§ 10. Namen und Symbole der R.-Z.-Δ. Es ist wohl im Interesse der Kürze erwünscht, sich über Namen und Symbole für die R.-Z.-Δ zu vereinbaren. Als ein vorläufiges möchte ich das nachfolgende Schema in Erwägung geben:

Ohne Zeit-Δ.		Mit $\mathfrak{M}$		Mit $\mathfrak{P}$	
Identität	1	Retroduktion	$\mathfrak{M}$	Dilation	$\mathfrak{P}$
Spiegelung	$\mathfrak{S}$	Kehrspiegelung	$\mathfrak{M}\mathfrak{S}$	Zeitspiegelung	$\mathfrak{P}\mathfrak{S}$
Inversion	$\mathfrak{J}$	Kehrinversion	$\mathfrak{M}\mathfrak{J}$	Zeitinversion	$\mathfrak{P}\mathfrak{J}$
Drehung	$\mathfrak{A}_n$	Kehrdrehung	$\mathfrak{M}\mathfrak{A}_n$	Zeitdrehung	$\mathfrak{P}\mathfrak{A}_n$
Drehspiegelung	$\overline{\mathfrak{A}}_n$	Kehrdrehspiegelung	$\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{A}}_n$	Zeitdrehspiegelung	$\mathfrak{P}\overline{\mathfrak{A}}_n$
Translation	$\mathfrak{T}$	Kehrtranslation	$\mathfrak{M}\mathfrak{T}$	Zeittranslation	$\mathfrak{P}\mathfrak{T}$
Gleitspiegelung	$\overline{\mathfrak{T}}$	Kehrgleitspiegelung	$\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{T}}$	Zeitgleitspiegelung	$\mathfrak{P}\overline{\mathfrak{T}}$
Schraubenbewegung	$\mathfrak{X}_n$	Kehrschraubenbewegung	$\mathfrak{M}\mathfrak{X}_n$	Zeitschraubenbewegung	$\mathfrak{P}\mathfrak{X}_n$

Die gleichen Präfixe fügt man den Namen der Symmetrieelemente, die gleichen aber kleinen Buchstaben den Symbolen derselben zu. Man kürzt dann noch zu: Kehrebene, Kehrachse, Kehrspiegelachse usw.

II. Die Gruppen der reinen Z.-Δ.

§ 11. Die Gruppe ohne $\mathfrak{P}$. Sobald zu der Gruppe zwei $\mathfrak{M}$ gehören, ist schon eine $\mathfrak{P}$ vorhanden. Es kann also nur eine $\mathfrak{M}$ in dieser Gruppe geben. Sie besteht aus Potenzen dieser $\mathfrak{M}$. Weil nun alle geraden Potenzen der Identität die ungeraden der $\mathfrak{M}$ selbst äquivalent sind, sind die nicht-äquivalenten Operationen der Gruppe nur:

$$1 \text{ und } \mathfrak{M}.$$

Die Bewegungen der Teilchen sind schon oben angegeben.

§ 12. Die Gruppe ohne $\mathfrak{M}$. Außer im Falle der Ruhe der Teilchen ist eine $\mathfrak{P}$ mit unendlich kleiner $\mathfrak{p}$ der Eigenschaft 3. zuwider. Wenn nun zu der Gruppe zwei $\mathfrak{P}$ gehören,

1) Hier liegt ein Unterschied vor zwischen den Betrachtungen in Comm. Nr. 7 l. c. und den gegenwärtigen. Es schien mir jetzt besser, die damals eingeführte Kehrdilation bei den später zu behandelnden Gruppen reiner Z.-Δ unterzubringen.

deren $\mathfrak{p}$ als größten gemeinschaftlichen Teiler die Einheit haben, so ruhen die Teilchen. Die Gruppe enthält dann nur die Identität.

Haben die $\mathfrak{p}$ jedoch einen anderen größten gemeinschaftlichen Teiler, so ist der letztere eine neue $\mathfrak{p}$ und die ursprünglichen $\mathfrak{P}$ sind Potenzen der zu dieser $\mathfrak{p}$ gehörigen $\mathfrak{P}$ äquivalent. Also kann es nur eine Gruppe der $\mathfrak{P}$ geben:

$$\{\ldots\ldots \mathfrak{P}^{-3}\ \mathfrak{P}^{-2}\ \mathfrak{P}^{-1}\ 1\ \mathfrak{P}\ \mathfrak{P}^2\ \mathfrak{P}^3\ldots\ldots\}.$$

Die Gruppe ist eine unendliche wie diejenige der Translationen. Die Bewegungen der Teilchen sind schon oben angegeben.

§ 13. Die Gruppe der $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$. Wenn eine Gruppe sowohl eine $\mathfrak{M}$ als eine $\mathfrak{P}$ enthält, so enthält sie auch die Operation $\mathfrak{M}\mathfrak{P}^n$ und ebenso $\mathfrak{P}^n$. Die nicht-äquivalenten Operationen sind:

$$\{\ldots\ \mathfrak{P}^{-3}\ \mathfrak{P}^{-2}\ \mathfrak{P}^{-1}\ 1\ \mathfrak{P}\ \mathfrak{P}^2\ \mathfrak{P}^3\ldots.$$
$$\{\ldots\ \mathfrak{M}\mathfrak{P}^{-3}\ \mathfrak{M}\mathfrak{P}^{-2}\ \mathfrak{M}\mathfrak{P}^{-1}\ \mathfrak{M}\ \mathfrak{M}\mathfrak{P}\ \mathfrak{M}\mathfrak{P}^2\ \mathfrak{M}\mathfrak{P}^3\ldots.$$

Fügt man der Gruppe eine $\mathfrak{M}_1$ zu, so entsteht eine neue $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{M}_1$. In diesem Falle, wie wenn man der Gruppe gleich eine neue $\mathfrak{P}_1$ zugefügt hätte, kann entweder die neue $\mathfrak{p}_1$ mit derjenigen der $\mathfrak{P}$ als größten gemeinschaftlichen Teiler die Einheit haben (und dann wird die Gruppe 1 $\mathfrak{M}$) oder der größte gemeinschaftliche Teiler ist $\mathfrak{p}_2$ und dann kann man die zugehörige $\mathfrak{P}_2$ statt $\mathfrak{P}$ in obenstehender Aufzählung der Operationen stellen. Daraus geht hervor, daß es keine weiteren Gruppen reiner Zeit-Δ geben kann[1]). Jedes Teilchen durchläuft eine anders geformte Bahn in schwingender Bewegung. Nur die Momente der Rückkehr sind für alle Teilchen die gleichen. In jeder Bahn läuft natürlich nur ein Teilchen.

§ 14. Die erzeugenden Operationen der Gruppen. Man kann immer jede der Operationen einer Gruppe betrachten als das Äquivalent eines fortlaufenden Produktes einiger ausgewählten derselben. Und zwar kann man die Wahl der „erzeugenden Operationen", wie Schoenflies dieselben nennt, auf verschiedene Weise treffen. Wir werden im Folgenden jede Gruppe mit einem Symbol andeuten, das man erhält, indem man zwischen $\{\ \}$ die Symbole der erzeugenden Operationen, von Kommas getrennt, stellt. Dann kann man die drei Gruppen reiner Zeit-Δ andeuten mit: $\{\mathfrak{M}\}$, $\{\mathfrak{P}\}$ und $\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2\}$.

III. Die Gruppen der R.-Z.-Δ, welche keine mit $\mathfrak{T}$ zusammengesetzten Δ enthalten.

§ 15. Der Zusammenhang dieser Gruppen mit den Schoenfliesschen Punktgruppen. Man betrachte einmal die Gesamtfigur der $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}_n$ usw, welche zum Teil den reinen R.-Δ, zum Teil den R.-Z.-Δ zugehören. Wendet man auf diese Figur eine der R.-Z.-Δ, welche aus der R.-Δ $\mathfrak{A}$ und der Z.-Δ $\mathfrak{H}$ zusammengesetzt ist, an, so ergibt das zwar eine mit der ursprünglichen kongruenten oder symmetrischen Figur an einem anderen Zeitpunkte; da jedoch die Figur ihrer Natur nach eine ruhende ist, gilt das ebenso für den unveränderten Zeitpunkt. Dann ist aber die R.-Δ $\mathfrak{A}$ allein eine Δ dieser Figur und kann dieselbe nur eine der zu den Punktgruppen gehörigen sein.

Daraus geht hervor: man findet alle denkbaren Gruppen der R.-Z.-Δ mit Ausschluß der Translationen, indem man nur bei jeder der Punktgruppen jede der nicht äquivalenten Operationen mit einer Zeit-Δ (einschließlich der Identität) in allen möglichen Kombinationen multipliziert und zu den so erhaltenen Gruppen noch jede der Gruppen reiner Z.-Δ fügt.

§ 16. Benutzung der erzeugenden Operationen. Man macht sich die Arbeit aber leichter, indem man die erzeugenden Operationen (§ 14) benutzt.

Man geht z. B. aus von der Punktgruppe $G = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}$. Multipliziert man deren erzeugende Operationen mit Z.-Δ, z. B. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$, so entsteht eine Gruppe $\Gamma_1 = \{\mathfrak{G}\mathfrak{A}, \mathfrak{H}\mathfrak{B}, \mathfrak{K}\mathfrak{C}\}$. Betrachtet man alle möglichen Variationen der Operationen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$, so erhält man die „Γ_1-Gruppen". Fügt man der Gruppe Γ_1 die Gruppe reiner Z.-Δ $\{\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}\}$ zu, so entsteht die Gruppe $\Gamma_2 = \{\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{G}\mathfrak{A}, \mathfrak{H}\mathfrak{B}, \mathfrak{K}\mathfrak{C}\}$. Durch Variation der Gruppe reiner Z.-Δ entstehen die „Γ_2-Gruppen".

Wenn man nun auf die in dem voranstehenden Paragraphen angegebenen Weise aus der Punktgruppe G eine Gruppe Γ abgeleitet hat, so hat Γ mit einer der Γ_1-Gruppen, z. B, Γ'_1 die Operationen $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{K}\mathfrak{C}$ gemein. Wenn es nun eine andere der nicht-äquivalenten Operationen der Gruppe G gibt, welche in Γ mit der Z.-Operation $\mathfrak{L}$, in Γ'_1 dagegen mit der Z.-Operation $\mathfrak{N}$ multipliziert ist, so füge man der Gruppe Γ''_1 als erzeugende Operation die Z.-Operation $\mathfrak{Q}$ zu (wodurch man eine der Γ_2-Gruppen, z. B. Γ''_2 erhält), so gewählt, daß $\mathfrak{Q}\mathfrak{N} = \mathfrak{L}$. Dann fällt der angegebene Unterschied zwischen Γ und Γ''_1 in Γ und Γ''_2 fort. In derselben Weise sind auch die anderen Unterschiede zwischen Γ und Γ''_1 zu beseitigen. Ein Konflikt zwischen den zugefügten Z.-Δ ist nicht zu befürchten, weil der Fall der Ruhe der Teilchen neben den R.-Δ der Gruppe jede Z.-Δ umfassen kann. Die Γ_2-Gruppen enthalten also alle möglichen Gruppen der R.-Z.-Δ.

1) Will man in obenstehender Gruppe prüfen, ob die Multiplikation einer der Operationen mit einer zweiten das Äquivalent einer dritten liefert, so soll man bedenken, daß $\mathfrak{M}\mathfrak{P}^k \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{P}^l = \mathfrak{M}\mathfrak{M}\mathfrak{P}^{-k}\mathfrak{P}^l = \mathfrak{P}^{l-k}$.

Man multipliziert also jede der erzeugenden Operationen einer Punktgruppe entweder mit 1, oder mit $\mathfrak{M}$, oder mit $\mathfrak{P}$ und multipliziert die so erhaltene Gruppe entweder mit $\{1\}$, oder mit $\{\mathfrak{M}\}$, oder mit $\{\mathfrak{P}\}$, oder mit $\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2\}$.

Man kann auf diese Weise zwar keine der gesuchten Gruppen übergehen, man wird jedoch eine gewisse Gruppe mehrere Male erhalten, ohne daß die Äquivalenz sogleich vor Augen liegt. Bevor wir diese Äquivalenz näher untersuchen, werden wir eine Wahl treffen für die erzeugenden Operationen der Punktgruppen.

§ 17. Wahl der erzeugenden Operationen der Punktgruppen. Für unsern Zweck wählt man am besten die nachfolgenden Bezeichnungen, welche die 32 Schoenfliesschen Punktgruppen mit umfassen:

$\{\mathfrak{A}_n\}$	
$\{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2\}$	$(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}'_2) = \frac{\pi}{n}$
$\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}'_3\}$	$(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}'_3) = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{2}$
$\{\mathfrak{A}_4, \mathfrak{A}'_4\}$	$(\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{a}'_4) = \frac{\pi}{2}$
$\{\mathfrak{A}_5, \mathfrak{A}'_5\}$	$(\mathfrak{a}_5\,\mathfrak{a}'_5) = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
$\{\mathfrak{A}_{2n}\}$	
$\{\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'\}$	$(\mathfrak{s}\,\mathfrak{s}') = \frac{\pi}{n}$
$\{\mathfrak{A}_n, \mathfrak{S}_n\}$	$(\mathfrak{a}_n\,\mathfrak{s}_n) = \frac{\pi}{2}$
$\{\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{S}_h\}$	$(\mathfrak{s}_v\,\mathfrak{s}'_v) = \frac{\pi}{n}$, $(\mathfrak{s}_v\,\mathfrak{s}_h) = (\mathfrak{s}'_v\,\mathfrak{s}_h) = \frac{\pi}{2}$
$\{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$	$(\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{s}_d) = \frac{\pi}{2n}$
$\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_h\}$	$(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{s}_h) = \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_d\}$	$(\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{s}_d) = \operatorname{arc\,sin} \frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\{\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$	$(\mathfrak{a}_4\,\mathfrak{s}) = \frac{\pi}{4}$
$\{\mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}\}$	$(\mathfrak{a}_5\,\mathfrak{s}) = \operatorname{arc\,tg} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Es sind immer möglichst wenige erzeugende Operationen gewählt worden und darunter möglichst viele äquivalenten. Das letztere hat den Vorteil, daß man z. B. von den beiden Gruppen $\{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}\mathfrak{A}'_3\}$ und $\{\mathfrak{P}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{M}\mathfrak{A}'_3\}$ nur eine zu betrachten hat. Weiter sind dann noch die Operationen so gewählt worden, daß schon eine möglichst niedrige Potenz derselben der Identität äquivalent ist.

§ 18. Die Standardbezeichnung der erhaltenen Gruppen. Man überwindet die Schwierigkeit, daß man mehrere Bezeichnungen für äquivalente Gruppen erhält am besten durch die Umwandlung aller Bezeichnungen in eine Standardform. Als solche werden wir diejenige betrachten, in welcher 1. alle in den Gruppen enthaltenen, mitunter zuerst verborgenen, reinen Z.-Operationen als erzeugende Operationen den anderen Operationen vorangestellt und insgesamt in eine der Formen $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ übergeführt worden sind, 2. die Z.-Operationen der erzeugenden R.-Z.-Δ wenn möglich in $\mathfrak{M}$ oder sogar in die Identität übergeführt worden sind.

Man muß also zuerst die reinen Z.-Operationen ausfindig machen. Dazu kann man bedenken, daß es verschiedene fortlaufende Produkte der erzeugenden Operationen der ursprünglichen Punktgruppe G gibt, die der Identität äquivalent sind. Die damit übereinstimmenden Produkte bei der untersuchten R.-Z.-Gruppe ergeben alle eine reine Z.-Operation derselben. In den meisten Fällen sieht man solche fortlaufenden Produkte der Gruppe G leicht genug. Kann man mit Hilfe der gewonnenen Z.-Operationen die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ der erzeugenden R.-Z.-Δ überführen in $\mathfrak{M}$ oder sogar die Identität, so macht man das gleich. Beispiel: $\{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}\mathfrak{A}'_3\}$. Da $(\mathfrak{M}\mathfrak{A}_3)^3 = \mathfrak{M}_1$ ist $\mathfrak{M}$ eine Operation der Gruppe. Macht man dann $\mathfrak{M}$ zu einer erzeugenden Operation, so kann man $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_3$ umsetzen in $\mathfrak{A}_3$. Man schreibt jetzt für $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1$. Dadurch kann man als erzeugende Operation jetzt $\mathfrak{M}_1\mathfrak{A}'_3$ statt $\mathfrak{P}\mathfrak{A}'_3$ wählen. Dann ist wiederum $(\mathfrak{M}_1\mathfrak{A}'_3)^3 = \mathfrak{M}_1$ eine Operation der Gruppe und sind die gesamten Z.-Operationen schon in der verlangten Form $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ vorhanden. Man setzt dann noch $\mathfrak{M}_1\mathfrak{A}'_3$ in $\mathfrak{A}'_3$ um und erhält so die Gruppe in der Standardbezeichnung $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}'_3\}$.

Behufs Auffindung der Z.-Operationen schreibt man oft am besten die nicht-äquivalenten Operationen der Gruppe G als fortlaufende Produkte der erzeugenden Operationen auf und findet dann leicht die oben erwähnten, der Identität äquivalenten Produkte dieser letzteren. So sieht man bei der Bearbeitung der Gruppe $\{\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}_2\mathfrak{A}'_3\}$ gleich, daß $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}'_3\mathfrak{A}_3$ und daß man also neben den Z.-Operationen $\mathfrak{P}_1^n$ und $\mathfrak{P}_2^n$ auch $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{P}_2\mathfrak{A}'_3)^2 = \mathfrak{P}_1^n\mathfrak{P}_2^n$ findet. Statt dieser letzteren betrachtet man natürlich $\mathfrak{P}_1^n\mathfrak{P}_2$. Jetzt sind die erhaltenen Z.-Operationen nicht zusammen in einer der verlangten Formen. Haben nun die Perioden der drei Dilationen als größten gemeinschaftlichen Teiler die Einheit, so ruhen die Teilchen und ist die Gruppe einfach $\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}'_3\}$. Ist jedoch der gr. gem. T. p, die zugehörige Dilation $\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{P}_1^n = \mathfrak{P}^k$, $\mathfrak{P}_2^n = \mathfrak{P}^l$ und $\mathfrak{P}_1^n\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}^m$ (k, l und m ganze Zahlen). Dann ist $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}^{k/3}$, $\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}^{l/3}$ und also $2k + l = 3m$ oder $l - k = 3p$. Die Bezeichnung der Gruppe wird $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^{k/3}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}^{k/3+p}\mathfrak{A}'_3\}$. Man darf in den Exponenten der Potenzen von $\mathfrak{P}$ ganze Zahlen streichen. Für k kommen also

nur die Werte 1 und —1 in Betracht. Dabei ist $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P}\mathfrak{A}_3$ weiter nichts als die Zeitdrehung mit einer derjenigen von $\mathfrak{P}\mathfrak{P}\mathfrak{A}_3$ entgegengesetzten $\mathfrak{p}$. Man bezeichnet die Gruppe, indem man noch zur Vermeidung von Brüchen statt $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{P}^3$ setzt, als $\{\mathfrak{P}^3, \mathfrak{P}^{\pm 1}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}^{\pm 1}\mathfrak{A}'_3\}_{++\cdot\ ++}$ deutet an, daß man nur gleiche Zeichen kombinieren darf.

Man bearbeitet zuerst die Gruppen, denen noch keine Gruppe reiner Z.-Operationen zugefügt worden ist. Mit Hilfe der für denselben erhaltenen Bezeichnungen ist dann die Behandlung der übrigen Gruppen leichter. Fügt man einer der behandelten Gruppen, z. B. Γ_1 dann eine erzeugende Z.-Operation, z. B. $\mathfrak{G}$, zu, so zieht man bei der Bearbeitung dieser Gruppe auch die schon behandelte Gruppe in Betracht, die man erhält durch Multiplikation der erzeugenden Operationen der Gruppe Γ_1 mit $\mathfrak{G}$. Beispiel: Man hat schon die Gruppe $\{\mathfrak{M}_1\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}_2\mathfrak{S}_h\}$ in die Standardbezeichnung $\{(\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)^2, \mathfrak{M}_1\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}_2\mathfrak{S}_h\}$ übergeführt und es soll nun $\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}_3\mathfrak{S}_h\}$ untersucht werden. Erstens ist natürlich wiederum $(\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3)^2$ eine Operation der Gruppe. Weil auch $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{S}_v$ eine Operation der Gruppe ist, ist das auch $(\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)^2$ und ebenso $(\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)^2$. Weiter handelt man mit diesen drei Dilationen als im vorangehenden Beispiel und erhält dann $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^{k/2}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^{l/2}\mathfrak{S}_h\}$, in dem man k und l nur 1 oder 0 zu nehmen hat. Für k und $l = 1$ z. B. würde man zur Vermeidung von Brüchen $\mathfrak{P}^2$ statt $\mathfrak{P}$ setzen. Dann sind die gesamten Z.-Operationen noch nicht in einer der verlangten Formen. Dazu wählt man als erzeugende Operation dann $\mathfrak{M}\mathfrak{P}^2$ und erhält so $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^2, \mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$. In der nachfolgenden Aufzählung der Gruppen ist jedoch der Kürze halber diese $\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{M}\mathfrak{P}^2$, $\mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{S}_v$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{S}_h$ immer fortgelassen worden.

Ist eine Gruppe wie $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}_1\mathfrak{S}_v, \mathfrak{P}_2\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{P}_3\mathfrak{S}_h\}$ zu behandeln, so setzt man $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{M}\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{M}\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{P}_3 = \mathfrak{M}\mathfrak{M}_3$ und sieht dann gleich, daß die Gruppe der Gruppe $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}_2\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}_3\mathfrak{S}_h\}$ äquivalent ist. Von diesen beiden Gruppen hat man also nur eine zu betrachten.

Als letztes Beispiel werden wir noch $\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2\mathfrak{A}_{zn}\}$ betrachten. Sowohl $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{A}_{zn}$ als $\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_1\mathfrak{A}_{zn}$ ist eine Operation der Gruppe. Also auch $\mathfrak{A}_{zn}^{-1}\mathfrak{M}_1^{-1}\mathfrak{M}_2^{-1} = \mathfrak{A}_n^{-1}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ und ebenso $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{A}_{zn}\mathfrak{A}_{zn}^{-1}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 = (\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)^2 = \mathfrak{P}^2$. Dann ist $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1\mathfrak{P}$. Die Gruppe ist also: $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^2, \mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{A}_{zn}\}$ oder $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_{zn}\}$.

Es ist öfters gut mit der Figur zu kontrollieren, ob man alle Z.-Operationen gefunden hat.

In der nachfolgenden Tabelle sind die erhaltenen Gruppen aufgeführt worden. Die Anzahl derselben ist 168, wobei man zu bedenken hat, daß eine Gruppe wie $\{\mathfrak{A}_n\}$ mehrere Gruppen umfaßt. Nur die 125 Gruppen der beiden letzten Kolumnen ergeben periodische Atommodelle. Die anderen sind Quasi-Atommodelle genannt worden[1]). Es ist angegeben worden, zu welchen Gruppen die Atommodelle von Sommerfeld, Landé und Madelung gehören.

§ 19. Schlußbemerkungen. Die Ebene-Zeit- und die Gerade-Zeit-Symmetrielehre ohne Translationen sind als spezielle Fälle im Vorangehenden enthalten.

Die Anzahl der Teilchen ist in der R.-Z.-Symmetrielehre wie in der R.-Symmetrielehre derjenigen der Operationen der Gruppe gleich. Nur bei besonderer Wahl der Lagen der Teilchen oder der Werte von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$ kann die Anzahl der Teilchen auf die Hälfte, ein Drittel usw. reduziert werden.

Die R.-Z.-Symmetrie eines Modells wird von der Kraftwirkung nicht zerstört. Um das einzusehen, zeichnet man in einer Figur die relativen Lagen der Teilchen zur Zeit t, die Bahnen der Teilchen und die von den Teilchen zu den Zeiten $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$ usw. auf diesen Bahnen eingenommenen Lagen. Wendet man nun auf diese Figur eine der R.-Z.-Δ der Gruppe an, so können vier Fälle eintreten: 1. Die neue Figur ist mit der ursprünglichen kongruent, die Zeit wird transformiert nach der Formel $t' = C + t$. Die mittransformierten Bahnen geben für die neuen Teilchen die Bewegungen richtig an, die R.-Z.-Symmetrie bleibt also fortwährend erhalten. 2. Die neue Figur ist mit der ursprünglichen symmetrisch, für die Zeit gilt das in 1. Gesagte. Auch die Bahnen sind bei der Transformation in die symmetrischen übergegangen. Sie geben auch jetzt die richtigen Bewegungen der Teilchen an, die Symmetrie bleibt erhalten. 3. Die neue Figur ist mit der ursprünglichen kongruent, die Zeit wird transformiert nach $t' = C - t$. Die Bewegungen der neuen Teilchen sind diejenige, welche man erhalten hätte, wenn man vor der Transformation zur Zeit $\frac{1}{2}C$ die Geschwindigkeiten der ursprünglichen Teilchen alle umgekehrt hätte. Diese Bewegungen der neuen Teilchen sind natürlich mit der Kraftwirkung verträglich und auch hier bleibt die Symmetrie erhalten.

1 Wenn doch die Konfiguration der Elektronen eines Atoms periodisch wiederkehrt (wie bei den Modellen, welche mit Gruppen der beiden letzten Kolumnen in Beziehung stehen, der Fall ist), so wird man einsehen können, daß man das Atom (in statistischem Sinne wenigstens) an den Eigenschaften, welche mit dieser Konfiguration zusammenhängen, wiedererkennen kann. Diese Erwägung ist zugleich eine Stütze für die Auffassung, daß die Individualität eines Atoms zum Teil wenigstens seiner R.-Z.-Symmetrie zuzuschreiben ist.

Tabelle der Gruppen der Raum-Zeit-Deckoperationen ohne Translationen.

Quasi-Atommodelle		Atommodelle	
Bewegung der Teilchen			
Willkürlich	Zurücklaufend	Umlaufend	Schwingend
$\{\mathfrak{A}_n\}$ $\{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_{2n}\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_n\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_{2n}\}$ $\{\mathfrak{P}^n, \mathfrak{P}^k\mathfrak{A}_n\}$	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_n\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_{2n}\}$
$\{\mathfrak{A}_{2n}\}$ $\{\mathfrak{M}\overline{\mathfrak{A}}_{2n}\}$	$\{\mathfrak{M}, \overline{\mathfrak{A}}_{2n}\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{M}\overline{\mathfrak{A}}_{2n}\}$ $\{\mathfrak{P}^{2n}, \mathfrak{P}^k\overline{\mathfrak{A}}_{2n}\}$	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \overline{\mathfrak{A}}_{2n}\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{A}}_{2n}\}$
$\{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2\}$ $\{\mathfrak{P}^n, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^k\mathfrak{A}'_2\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}'_2\}$	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}'_2\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}'_2\}$
wenn $\{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}'_2\}^{2n}=1$ $\{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_2..\mathfrak{A}'_2\}$	— — —

Quasi-Atommodelle		Atommodelle	
Bewegung der Teilchen			
Willkürlich	Zurücklaufend	Umlaufend	Schwingend
		$\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{M}\mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^{2n}, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^{\varepsilon}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{P}^{\varepsilon}\mathfrak{S}_h\}$ [1]	
wenn $\{\mathfrak{S}_v\mathfrak{S}'_v\}^{2n+1} = 1$	— — — — —		
		$\{\mathfrak{P}^{4n+2}, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^{2+\varepsilon}\mathfrak{S}_v, \mathfrak{M}\mathfrak{S}'_v, \mathfrak{P}^{2n+1}\mathfrak{S}_h\}$	
$\{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_d\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{P}^{2n}, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^{\varepsilon}\mathfrak{S}_d\}$ [2] $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_d\}$	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_d\}$
$\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_h\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^3, \mathfrak{P}^{\pm 1}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^6, \mathfrak{P}^{\pm 2}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}^3\mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{P}^3, \mathfrak{P}^{\pm 1}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_h\}$	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_h\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_h\}$
$\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_d\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_d\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_d\}$ [3] $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_d\}$ [4] $\{\mathfrak{P}^3, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{P}^3, \mathfrak{P}^{\pm 1}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{M}\mathfrak{S}_d\}$ [5]	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_d\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{P}\mathfrak{S}_d\}$
$\{\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{M}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{A}_4, \mathfrak{M}\mathfrak{S}\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$ [6] $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{M}\mathfrak{S}\}$ [7] $\{\mathfrak{P}^6, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{M}\mathfrak{P}^{\varepsilon}\mathfrak{S}\}$ [8]	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{P}\mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{P}\mathfrak{S}\}$

1) Die Symmetrie des Landéschen doppeltpyramidalen Modells:
für $k = 0$, wenn die Anzahl der Bahnen gerade ist; für $k = n$, wenn n durch 4 teilbar ist und jedes zweite Elektron $\frac{1}{2}$ Phasenunterschied gegen die anderen hat; für $k = 0$, wenn n gerade ist und in jeder Bahn q Elektronen (q ungerade) laufen.

2) Die Symmetrie des Landéschen doppeltpyramidalen Modells:
für $k = n$, wenn die Anzahl der Bahnen ungerade ist; ebenso wenn dann die beiden Elektronen in zwei aufeinanderfolgenden Bahnen $1n$ Phasenunterschied haben; wenn in jeder Bahn q Elektronen laufen, soll $k = 0$ sein, wenn q gerade ist und $k = n$, wenn q ungerade ist.
Die Landéschen rhomboedrischen Modelle sind spezielle Fälle dieser doppeltpyramidalen Modelle für $n = 3$.

3) Die Symmetrie des Landéschen tetraedrischen Modells mit 24 Elektronen.

4) Die Symmetrie des Landéschen tetraedrischen Modells mit 12 Elektronen.

5) Die Symmetrie des Landéschen tetraedrischen Modells mit 4 und des Madelung-Landéschen Modells mit 8 Elektronen; beim ersteren ist das m der $\mathfrak{M}$ dem Zeitpunkte der Überschreitung einer der $\mathfrak{S}$ gleich, beim zweiten nicht.

6) Die Symmetrie des Landéschen würfelsymmetrischen Modells mit 48 Elektronen.

7) Die Symmetrie des Landéschen würfelsymmetrischen Modells mit 24 Elektronen.

8) Die Symmetrie des Landéschen würfelsymmetrischen Modells mit 8 Elektronen für $k = +1$ oder $+2$.

Quasi-Atommodelle		Atommodelle	
Bewegung der Teilchen			
Willkürlich	Zurücklaufend	Umlaufend	Schwingend
		$\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{P}\mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{P}\mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{P}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{M}\mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{M}\mathfrak{A}_4, \mathfrak{P}\mathfrak{S}\}$	
$\{\mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{A}_5, \mathfrak{M}\mathfrak{S}\}$	$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}\}$	$\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{M}\mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{P}\mathfrak{S}\}$	$\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}\}$ $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{P}^2, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{P}\mathfrak{S}\}$

4. Dieser Fall braucht wohl nicht mehr besprochen zu werden.

Die Bewegungsgleichungen haben die R.-Z.-Symmetrie der Gruppe. Daher war es Landé möglich, das n-Körperproblem durch geschickte Wahl der $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{P}$ auf ein 1-Körper-Problem zurückzuführen[1]). Es wäre jedoch möglich, daß man eine R.-Z.-Symmetrie der Atommodelle nur in statistischem Sinne auffassen sollte. Man könnte die in dieser Mitteilung gegebenen Betrachtungen als einen Teil der Atomkinematik der Atomdynamik Landés gegenüberstellen. Dadurch wird der mechanische Charakter der R.-Z.-Symmetrielehre dem mathematischen Charakter der R.-Symmetrielehre gegenübergestellt.

Utrecht, Lab. f. Physik u. Phys. Chemie der Tierärztlichen Hochschule.

(Eingegangen 11. Juli 1921.)

1) Doch ist hierzu diese Wahl nicht notwendig. Das Problem ist immer ein 1-Körper-Problem. Nur kommen in den Differentialgleichungen des einzigen Körpers die Koordinaten der Lagen des Körpers in der Vergangenheit oder der Zukunft vor.

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über Lichtanregung und Ionisation von Atomen und Molekülen durch Stöße langsamer Elektronen.

Von J. Franck.

(Fortsetzung und Schluß.)

Bei Argon ist außer einigen mit Verstärkerröhren ausgeführten, mehr orientierenden Messungen wiederum eine neue Arbeit von Frank Horton und Ann Davies zu nennen. Auch hier haben wir Bedenken über die Richtigkeit der Deutung der Resultate. Die folgende Tabelle zeigt, daß eine weitere Durchmessung des Argons ebenfalls noch dringend notwendig ist (sie ist zurzeit in Ausführung begriffen).

Tabelle VII.

Anregungsspannung	Ionisierungsspannung	Beobachter u. Methode
12 Volt	—	Franck u. Hertz (siehe alter Bericht).
11,5 „	(15,1 18,1 Volt	Frank Horton und A. Davies, Proc. Roy. Soc. London A. Vol. 87, 1, 1920. Lichtelektr. Verfahren und Methode Davies u. Goucher.
—	ca. 15,6 „	Found, Phys. Rev. 16, 41, 1920. Verstärkerrohr.
ca. 12 „	—	Stead u. Gossling, loc. cit. Verstärkerrohr. (Die Anregungsspannung wird für die Ionisierungsspannung gehalten.)

Mehratomige Gase.

Wie unter „Methoden" schon erwähnt, sind die Untersuchungen in mehratomigen Gasen komplizierter sowohl in experimenteller wie in theoretischer Hinsicht. Wegen der Elektronenaffinität dieser Gase hat man auch bei Geschwindigkeiten der Elektronen, die nicht genügen, um eine Lichtanregung des getroffenen Moleküls anzuregen, mit den unelastischen Stößen zu rechnen, bei denen z. B. ein Elektron eingefangen und ein negatives Ion gebildet wird. Diese negativen Ionen wandern an die Elektroden, bilden dort Doppelschichten, die in elektronegativen Gasen einen Betrag von mehreren Volt haben können. Ferner ist in vielen Fällen mit einer Zersetzung der Substanz durch die Elektronenstöße und durch

die Berührung mit dem Glühdraht zu rechnen. Alle diese Gründe bewirken, daß es schwerer ist, in mehratomigen Gasen eindeutige Resultate zu erhalten als in einatomigen. Als Meßmethoden kommen diejenigen in Betracht, bei denen die Elektronen ihre Geschwindigkeit auf einem Wege erhalten, auf dem sie keine Zusammenstöße erleiden, vor allem also die lichtelektrische Methode und die modifizierte Methode des unelastischen Stoßes. Fehler bei der Geschwindigkeitsbestimmung der Elektronen, die hier naturgemäß besonders leicht auftreten, beseitigt man, wie erwähnt, am besten durch Zumischung von Helium als Eichgas. Wie Foote und Mohler zeigten, kann man auch den Abstand zweier Maxima beim Verfahren des unelastischen Stoßes zur Anbringung der Korrektur verwenden. Die Deutung dieses Abstandes als Resonanzspannung müssen wir jedoch, wie oben erwähnt, ablehnen. Trotzdem die in mehratomigen Gasen gewonnenen Resultate zum Teil nur als vorläufige anzusehen sind, da es nicht immer möglich war, alle Fehlerquellen genügend zu berücksichtigen, kann man aus ihnen einige Folgerungen ziehen, die wir für prinzipiell gesichert ansehen möchten. Zu ihrer Darstellung sind einige Vorbemerkungen notwendig.

Die Bohrsche Theorie schreibt die Emission der Bandenspektren den Molekülen zu. Die Theorie der Bandenstrahlung, die von Schwarzschild, Heurlinger und insbesondere Lenz entwickelt ist, berücksichtigt beim Übergange eines Quantenzustandes des Moleküls in einen andern außer der Änderung des Drehimpulses eines Elektrons auch die Änderungen der Rotations- und Schwingungsquanten der Atome des Moleküls. Die gesamte Änderung der Energie zwischen Anfangs- und Endzustand ergibt die Frequenz des ausgestrahlten oder absorbierten Lichtes nach der $h\nu$-Beziehung. Benutzt man auf diese Weise die $h\nu$-Gleichung als reine Energiebilanzgleichung, so kann man, ohne von der Art des Übergangs eines Quantenzustands in den andern etwas zu wissen, die Bandenabsorption bzw. -emission wiedergeben. Führt man dem Molekül die Energie durch ein stoßendes Elektron zu, das dabei seine ganze kinetische Energie an das Molekül abgeben soll, so darf man nicht ohne weiteres die Gültigkeit der Energiebilanzgleichung annehmen, ohne zu überlegen, ob es für diesen Prozeß einen Weg gibt, der mit dem Impulssatz nicht im Widerspruch steht. Wir möchten das mit einem Beispiel belegen. Der Impulssatz wird verletzt, wenn man annimmt, daß durch den Stoß eines Elektrons, dessen kinetische Energie gerade den für den Energieumsatz verbrauchten Wert besitzt, durch direkte Energieabgabe an die Atome des Moleküls das Rotationsquantum geändert würde; vielmehr kann ein solcher Prozeß nur vor sich gehen, wenn das stoßende Elektron seine Energie an ein Elektron des Moleküls abgibt und die Umlagerung der aufgenommenen Energie innerhalb des Moleküls in einem weiteren Akte erfolgt. Es mag fürs erste müßig sein, den verschiedenen Möglichkeiten, wie eine solche Umlagerung innerhalb des Moleküls stattfinden kann, nachzugehen. Es hat sich aber gezeigt, daß man durch formale Anwendung der $h\nu$-Beziehung zu Fehlschlüssen kommen kann. Hierhin gehört die Vermutung, daß H_2 durch Elektronenstöße von 3—4 Volt dissoziiert werden könne, ohne daß das Molekül eine Absorptionslinie besitzt, die diesem Energiequant entspricht. Die thermische Dissoziation, die durch Molekülstöße erfolgt, ist nicht analog der durch Elektronenstöße erfolgenden zu behandeln. Man kann nicht einmal mit Bestimmtheit behaupten, daß jeder Absorptionslinie eines Bandenspektrums ein unelastischer Elektronenstoß entspricht. Wegen der großen Häufung der Bandenlinien ist auch eine experimentelle Lösung dieser Frage wohl kaum ausführbar. Von Interesse ist jedoch in diesem Zusammenhang die unter „Methoden" abgedruckte Kurve des Stickstoffs aus der Dissertation von Brandt. Hier treten im lichtelektrischen Teil Knicke im Abstand von einigen Hundertstel Volt auf, woraus sich (auf A.E. umgerechnet) entnehmen läßt, daß Quantensprünge in einem Frequenzenabstand, wie er den Schwingungsquanten der Stickstoffatome entspricht, angeregt werden können. Eine Identifizierung dieser Knicke mit einem bestimmten Teil des Stickstoffbandenspektrums ist aus experimentellen Gründen nicht möglich, da man nur kleine Gebiete in Sprüngen von $^1/_{100}$ Volt durchmessen und somit die Absolutwerte der Spannungen nicht genau fixieren kann.

Die oben angeschnittene Frage des Zusammenhangs der Dissoziation des Moleküls mit der Anregung des Moleküls durch Elektronenstoß ist jedoch unseres Ermessens aus dem Verhalten der spektralen Emission in Entladungsröhren mit Sicherheit zu beantworten. Betrachten wir als Beispiel den Wasserstoff. Er ist in molekularer Form durchsichtig bis zum Wellenlängengebiet von ca. 1200 A., wo die bandenartige Absorption einsetzt. Das optisch erforschte langwelligere Viellinienspektrum entspricht also einer höheren Anregungsstufe des Moleküls. Dieser Schluß ist in bester Übereinstimmung mit direkten Messungen der

Anregungsspannung des Viellinienspektrums, die Werte von 17—18 Volt ergeben, während sich aus der Absorptionsgrenze von 1200 A. ein Wert von nur ca. 10 Volt ergibt. Da die thermisch bestimmte Dissoziationsarbeit von 80—100 Kilokalorien pro Mol (entsprechend der Energie eines 3,5—4-Voltstrahles) viel kleiner ist als die genannten Energiebeträge, so sieht man, daß man einem Molekül durch Lichtabsorption oder durch Elektronenstoß eine viel größere Energie, als zu seiner Dissoziation notwendig ist, zuführen kann, ohne daß es seinen Molekülcharakter verliert. Andrerseits zeigt ebenfalls direkte optische Beobachtung, bei Spannungen etwas oberhalb 18 Volt das Auftreten der dem Atom zugehörigen Balmerlinien in einer Stärke, die es als ganz unmöglich scheinen läßt, daß nur die wenigen beim Entladungsprozeß gebildeten H-Atome im freien Zustande von den 18-Volt-Strahlen getroffen und zum Leuchten angeregt werden. Derselbe scheinbare Widerspruch tritt auf bei Beobachtung des Viellinien- und Serienspektrums des Wasserstoffs im Entladungsrohr. Z. B. beobachtet Merton beide Spektra nebeneinander in einem Gemisch von viel Helium (ca. 40 ccm) mit sehr wenig Wasserstoff. Bemerkenswert ist, daß dabei die Balmerserie bis zum 13. Gliede beobachtet wird. Da im Helium unter diesen Bedingungen die Geschwindigkeit der Elektronen nur bis zu einer Geschwindigkeit von 20-Volt-Strahlen ansteigt, so müssen offenbar Strahlen dieser Geschwindigkeit die zur Dissoziation des Moleküls nötige Energie vermehrt, um die zur Anregung der Balmerlinien am Atom verbrauchte in einem Zuge dem Molekül zuführen. Der hierzu notwendige Energiebetrag läßt sich berechnen. Er beträgt für die Dissoziationsarbeit 3,5—4 Volt und für die ganze Balmerserie 13,6 Volt, so daß als Summe sich ein Wert von 17—18 Volt in ungefährer Übereinstimmung mit den direkten optischen Methoden ergibt. Dieses Nebeneinanderauftreten der beiden Spektren klärt sich auf, wenn man annimmt, daß das Molekül eine viel höhere Energie, als zur Dissoziation notwendig ist, aufnehmen kann, ohne daß es in seine Bestandteile zerfallen muß. Vielmehr kann es, wenn keine Störung vorliegt, die aufgenommene Energie als Bandenstrahlung reemittieren und in seinen Normalzustand zurückkehren. Tritt aber, nachdem die Anregung des Moleküls stattgefunden hat, vor der Reemission der Energie eine Störung durch einen Zusammenstoß mit einem Atom oder Molekül ein, so wird die aufgenommene Energie zur Dissoziation in Atome und zur Anregung eines der Atome verwandt. Diese Auffassung ist vollkommen identisch mit der von Stern und Volmer für photochemische Zerfallsreaktionen vertretenen; auch hier führt die aufgenommene Energie $h\nu$ nur dann zu dem vom Einsteinschen Äquivalenzgesetz geforderten Molekülzerfall, wenn das angeregte Molekül durch einen Zusammenstoß eine Störung erfährt. Bei dem vorliegenden Problem läßt sich aus dem starken Auftreten der ganzen Balmerserie unter den oben beschriebenen Bedingungen die Folgerung ziehen, daß die Summe: Dissoziationsarbeit + Ionisierungsarbeit eines Atoms kleiner ist als die Ionisierungsarbeit des H_2-Moleküls, die den Übergang von H_2 zum H_2+-Ion bewerkstelligt. Als Gleichung geschrieben heißt diese Behauptung $D + J_H < J_{H_2}$. Wäre nämlich $J_{H_2} < D + J_H$, so würde bei dieser kleineren Spannung dem Molekül ein Elektron völlig entrissen, und es wäre die Umlagerung des erregten Moleküls in den Zustand eines normalen Atoms und eines, das bis zur Grenze der Ionisation erregt ist, nicht möglich[1]). Eine Bildung von H_2+, also Ionisation ohne Zerfall des Moleküls, sollte bei größeren Elektronengeschwindigkeiten auftreten, da dann dem H_2-Molekül das Elektron durch den Stoß so schnell entrissen wird, daß keine Umlagerung stattfinden kann. Dieser Schluß bestätigt sich durch Resultate von Dempster; er wies nach, daß in Kanalstrahlenröhren, bei denen die Ionen durch Elektronenstrahlen von einigen Hundert Volt Geschwindigkeit hervorgerufen waren, nur H_2+ im Kanalstrahlenbündel auftrat. Ließ er jedoch die einmal gebildeten Kanalstrahlen mit Molekülen zusammenstoßen, so trat sekundär die Bildung von H+ und H_2+ ein. Nach diesen Überlegungen können wir direkt hinschreiben, welche Resultate man von Elektronenstoßuntersuchungen erwarten sollte. Die erste Lichtanregung sollte, berechnet aus der beginnenden Undurchsichtigkeit des H_2-Gases bei ca. 1200 bis 1300 A. durch Elektronenstöße von 10 bis 11 Volt, verursacht werden. Ferner sollte sich in der lichtelektrischen Kurve der Wert der Dissoziationsarbeit + Anregungsspannung des ersten Gliedes der Lymanserie markieren. Setzen wir für die Dissoziationsarbeit den Langmuirschen Wert $D = 84\,000$ kal entsprechend 3,6 Volt ein, so ergibt das einen

1) Das kontinuierliche Spektrum des Wasserstoffs, das Stark gefunden hat, und das nach ihm und anderen bei etwas kleineren Anregungsspannungen als das Viellinienspektrum emittiert wird, ist in dieser Diskussion nicht erwähnt, da die obigen Schlüsse dadurch nicht berührt werden, und da eine Untersuchung, die seine Einreihung in die quantentheoretischen Überlegungen als möglich erscheinen läßt, zurzeit im Gange ist.

Knick der Kurve bei $3{,}6 + 10{,}2 = 13{,}8$ Volt. Dissoziation + Ionisation eines Atoms sollte die erste Ionisationsstufe bei

$$D + J_H = 3{,}6 + 13{,}6 = 17{,}2 \text{ Volt}$$

ergeben. Ferner sollte eine weitere Ionisationsstufe für $J_{H_2}{}^+$ auftreten, deren Lage sich nicht im voraus genau angeben läßt. Die folgende Tabelle ermöglicht einen Vergleich dieser Überlegungen mit den in H_2 gefundenen neueren Resultaten.

Tabelle VIII.

Anregungsspannungen		Starke Ionisation	Schwache Ionisation	Beobachter und Methode
10,8 Volt	13,4 Volt	15,8 Volt	—	Davies u. Goucher nach ihrem Verfahren.
11 „	—	15,7 „	—	Bishop, Lenardschaltung.
11 „	13,6 „	17,1 „	11 Volt 30,45 Volt	Franck, Knipping u. Krüger, Lichtelektr. Verfahren und Methode Davies u. Goucher.
10,6 „	—	16,4 „	13,1 Volt	Mohler u. Foote, Lichtelektr. Verfahren, Methode Davies u. Goucher und unel. Stoß II.
10,5 „	13,9 „	16,9 „	14,4 „	Horton u. Davies, Lichtelektr. Verfahren und Methode Davies u. Goucher.
—	—	15,8 „	—	Found, Verstärkerrohr.
10,8 „	13,4 „	15,8 „	11 „	Compton u. Olmstead; Lenardschaltung mit drehbarem Auffänger.

Eine Kritik dieser Resultate scheint aus rein experimentellen Gründen notwendig. So möchten wir der Vermutung Ausdruck geben, daß die unter „schwache Ionisation" aufgezählten Werte bis auf den bei 30,45 Volt beobachteten alle vorgetäuscht sind durch die mehrfach erwähnten Einflüsse der sekundären Ionisation. Die 11-Volt-Werte liegen überdies so nahe bei dem Wert der Ionisierungsspannung für Quecksilberdampf, daß es trotz der Anwendung aller Vorsichtsmaßregeln möglich ist, daß minimale Mengen von Quecksilberdampf, die sehr schwer zu vermeiden sind, die bei dieser Spannung beobachtete Ionisation verursacht haben. Vermutlich kommt eine schwache Amalgamierung der Platinelektroden zustande während der Zeiten, in denen keine flüssige Luft am Rohrsystem liegt. Der Ionisationswert bei 30,45 Volt, der nach der lichtelektrischen Schaltung gemessen ist, scheint uns als solcher Vertrauen zu verdienen, jedoch möchten wir die Deutung, die wir selber dieser Ionisierungsstufe gegeben haben, nämlich den Zerfall eines H_2-Moleküls in 2 positive Atomionen und 2 Elektronen, nunmehr als theoretisch unmöglich verwerfen. Diese Deutung wurde durch eine Zahlenübereinstimmung nahegelegt. Ob man diese Ionisierungsstufe als Ionisierungsarbeit, die zum Übergang von H_2 in $H_2{}^+$ verbraucht wird, ansehen darf, wird erst nach Berechnung eines guten Molekülmodells des Wasserstoffs entschieden werden können; auffällig hoch ist jedenfalls dieser Wert, so daß man höchstens an eine Bildung von stark angeregtem $H_2{}^+$ denken könnte. Für seine Realität sprechen ältere Beobachtungen von Neubert, der Schichtpotentialdifferenzen im Wasserstoff von ca. 31 Volt gefunden hat und diese als Ionisierungsarbeit zur Bildung von $H_2{}^+$ gedeutet hat. Jedoch wird man die Unsicherheit der Theorie der Schichtenbildung in Betracht ziehen müssen. Die unter „Strahlung" vermerkten Werte der Tabelle stimmen mit den theoretischen Schlüssen innerhalb der Beobachtungsfehler überein. Bei der Hauptionisationsstufe ist eine solche Übereinstimmung nur bei den Krügerschen Messungen vorhanden. Wir halten diese Messung für die genaueste, da sie unter Benutzung von Helium als Eichgas durchgeführt wurde. Die übrigen Werte liegen z. T. merkwürdig tief, vielleicht ist dieses Resultat zu erklären durch unsern obigen Hinweis, daß man zu kleine Werte für die Ionisierungsspannung erhält, wenn man auf das erste Anzeichen von Ionisation anstatt auf den starken Knick in der Stromspannungskurve achtet (s. Quecksilberkurve). Als Gesamtresultat muß man angeben, daß weitere Untersuchungen[1]) im Wasserstoff noch nötig sind, daß jedoch die Resultate zum mindesten für die prinzipielle Möglichkeit sprechen, durch Elektronenstoßmessungen zu sauberen Werten für die Dissoziationsarbeit der Moleküle zu gelangen.

Den sicheren Nachweis hierfür erbrachte neuerdings eine Arbeit von Smyth und Compton[2]) über die Ionisation des Joddampfes. Diese Autoren fanden in Joddampf bei normaler Temperatur eine schwache Ionisationsstufe bei 8 Volt und eine starke bei 9,4 Volt. Da unter der Einwirkung des Glüh-

1) Vielleicht ist auch der Zerfall von H_2 in $H+$ und $H-$ in Erwägung zu ziehen, der wegen der Elektronenaffinität des H-Atoms von ca. 1,5 Volt bis ca. 15,6 Volt zu erwarten wäre, worauf mich freundlichst Herr Haber gesprächsweise aufmerksam machte.

2) Smyth u. Compton, Phys. Rev. 1921.

Tabelle IX.

Aus der V. Gruppe des periodischen Systems.

Gas	Anregungsspannung	Ionisierungsspannung	Autor und Methode
Stickstoff	7,5 Volt	—	Franck u. Hertz (alter Bericht), Lenardschaltung.
	11,8 „	—	F. Maier (alter Bericht), Lenardschaltung.
	7,7 „	—	Hughes u. Dixon (alter Bericht), Lenardschaltung.
	7,5 „	—	Bishop (alter Bericht), Lenardschaltung.
	7,4 und 9 Volt	ca. 18 Volt	Davies u. Goucher, Phys. Rev. 13, 1, 1919. Lenardmethode.
	7,4 Volt	—	Smyth, Phys. Rev. 14, 409, 1919. Lenardmethode.
	8,18 „	16,9 + 0,5 Volt	Mohler u. Foote, Journ. Opt. Soc. Amer., Vol. II (2), 1920. Lichtelektr. Schaltung und unel. Stoß II.
	7,2 und 8,5 Volt	17,75 + 0,3 Volt 25,4 · 30,7 Volt schwächer	E. Brandt, Berliner Dissertation. Lichtelektr. Schaltung und Stoß II usw.
	—	ca. 16 Volt	Found, loc. cit. Verstärkerrohr.
Phosphor	5,8 + 0,1 Volt	13,3 + 0,5 Volt	Mohler u. Foote, wie bei N_2.
Arsen	4,7 Volt	11,5 Volt	Foote, Roguley u. Mohler, Phys. Rev. 13, 59, 1919. Unel. Stoß, Charakteristik.

Aus der VI. Gruppe des periodischen Systems.

Gas	Anregungsspannung	Ionisierungsspannung	Autor und Methode
Sauerstoff	9 Volt	—	Franck u. Hertz, wie bei N_2.
	9,5 „	—	Mayer, wie bei N_2.
	9,2 „	—	Hughes u. Dixon, wie bei N_2.
	9,0 „	—	Bishop, wie bei N_2.
	7,91 „	15,5 Volt	Mohler u. Foote, wie bei N_2.
Schwefel	4,0 Volt 7,8 + 0,2 Volt	12,2 + 0,5 Volt	Mohler u. Foote, Phys. Rev. 15, 321, 1920. Unel. Stoß II, lichtelektr. Schaltung.

Aus der VII. Gruppe des periodischen Systems.

Jod siehe oben im Text.
Einige andere Elemente ohne Unterscheidung zwischen Lichtanregung und Ionisation siehe alter Bericht.

Aus der VIII. Gruppe des periodischen Systems.

Edelgase siehe oben im Text.

Gasförmige Verbindungen.

Einige Gase wie bei der Gruppe VII, siehe alter Bericht, neu sind:

Kohlenoxyd	—	14,5 Volt	Stead u. Gossling, wie bei N_2.
	—	15 „	Found, wie bei N_2.
	6,4 Volt 12,1 13,6 19,1 21,9 24,6	10,1 und 14,3 Volt	Foote u. Mohler, Phys. Rev., März 1921.
Zinkäthyl	ca. 7 Volt	12 Volt	wie bei N_2.
Zinkchlorid	—	12,9 „	„ „
Mercurichlorid	—	12,1 „	„ „
			„ „

drahtes eine schwache Dissoziation des Jods wahrscheinlich war, so untersuchten sie den Joddampf bei so hohen Temperaturen, daß die Hauptmenge dissoziiert war. Es ergab sich, daß die 8-Volt-Stufe in ihrer Stärke proportional mit dem Dissoziationsgrad anwuchs, während die 9,4-Voltstufe entsprechend schwächer wurde. Die Autoren schreiben daher die Ionisation bei 8 Volt einer Bildung von Jodatomionen zu, während sie die 9,4-Voltstufe als Bildungsarbeit eines Jodatomions und eines Jodatoms, also als $D + J_J$ bezeichnen. Die Differenz beider Stufen 1,4 Volt ließ sich genau ermitteln, unabhängig von möglichen Fehlern der Absolutwerte der Spannung. Sie stimmt genau mit der thermisch bestimmten Disso-

zierungsarbeit des J_2-Moleküls überein. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß Smyth und Compton, angeregt durch eine frühere Arbeit von Franck und Westphal[1]), den Versuch gemacht haben, die Ionisierungsarbeit von fluoreszierendem Joddampf festzustellen. Sie finden in der Tat eine Herabsetzung dieser Arbeit durch die Fluoreszenz. Wir haben jedoch wiederum wegen der sekundären Ionisation Bedenken, daß das Resultat richtig gedeutet sei, besonders da es sehr unwahrscheinlich scheint, daß genügend viel Moleküle sich gleichzeitig im Anregungszustand befinden, um eine merkliche Ionisierungsstufe dieser Molekülgruppe zu ergeben. Joddampf ist außerdem von Mohler und Foote[2]) untersucht worden; sie erhalten Ionisation bei $10{,}1 \pm 0{,}5$ Volt. Ferner liegt ein unelastischer Stoß bei $2{,}34 \pm 0{,}2$ Volt, der von ihnen als Resonanzspannung bezeichnet ist, unseres Ermessens jedoch nur eine Festlegung eines Absorptionsgebietes des Joddampfes nach der $h\nu$-Beziehung ergibt.

Weitere Angaben über die Resultate, die in mehratomigen Gasen erhalten sind, sollen in Form von Tabellen folgen. (Vgl. Tab. IX.)

Aus den Tabellen geht hervor, daß ein Teil der Resultate, kenntlich durch die Übereinstimmung der Mehrfachbestimmungen, recht zuverlässig erscheint, besonders halten wir den Wert für die Ionisierungsspannung des Stickstoffs von E. Brandt, da Helium als Eichgas verwandt wurde, für gut. Ein andrer Teil der Resultate hat wohl nur informatorische Bedeutung. Deutungen dieser Resultate, die verschiedentlich vorgeschlagen sind, wollen wir hier wegen ihrer Unsicherheit nicht bringen.

1) Franck u. Westphal, Verh. d. D. phys. Ges. 1912, S. 159.

2) Mohler u. Foote, Phys. Rev. 15, 321, 1920.

Zusammenfassung.

Als wesentliche Fortschritte auf dem Elektronenstoßgebiete seit dem Erscheinen des letzten Referats in dieser Zeitschrift betrachten wir:

1. Die große Zahl der Bestimmungen von Anregungs- und Resonanzspannungen in einatomigen Gasen, die eine so gute Übereinstimmung mit der Bohrschen Deutung der Seriengesetze ergeben haben, daß sie in ihrer Gesamtheit eine gute Methode zur Bestimmung des Wertes von h darstellen.

2. Die Ergänzung und Kontrolle optischer Methoden zur Festlegung von Serienbeziehungen und das Auffinden von neuen Seriengliedern in den Spektralgebieten, die den optischen Methoden schwer oder gar nicht zugänglich sind.

3. Die Möglichkeit der direkten Prüfung der Richtigkeit von Atommodellen.

4. Die Feststellung metastabiler angeregter Atome.

5. Den Nachweis von Zusammenhängen von Dissoziation und Ionisation von mehratomigen Gasen.

Göttingen, April 1921.

(Eingegangen 6. Mai 1921.)

Druckfehlerberichtigung.

Seite 446, 2. Spalte sind in der 1. und 3. Zeile die Worte Parhelium und Orthohelium zu vertauschen.

Der Satz heißt also: Landé hat das Spektrum des Parheliums einem Heliumatom zugeschrieben, das gekreuzte Elektronenbahnen hat, das des Orthoheliums einem Helium mit komplanaren Elektronenbahnen.

BESPRECHUNGEN.

E. Grimsehl, Lehrbuch der Physik. Zum Gebrauch beim Unterricht, bei akademischen Vorlesungen und zum Selbststudium. In zwei Bänden. Erster Band: Mechanik, Wärmelehre, Akustik und Optik. Vierte vermehrte und verbesserte Auflage. Herausgegeben von W. Hillers unter Mitarbeit von H. Starke. gr. 8°. XVI u. 1011 S. Mit 1049 Figuren im Text, 10 Figuren auf 2 farbigen Tafeln u. 1 Titelbild. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1920. Geh. M. 16.50, geb. M. 18.60 u. Teuerungszuschläge des Verlages und der Buchhandlungen[1]).

Das rühmlichst bekannte Buch von Grimsehl ist in vierter Auflage erschienen. Ursprünglich hervorgegangen aus dem Unterricht an der Oberrealschule und deren Zwecken dienend, hat das Buch eine eigenartige Entwickelung durchgemacht, veranlaßt dadurch, daß es hauptsächlich von Studenten und Lehrern benutzt wurde. Immer mehr hat es sich den Bedürfnissen seines Leserkreises angepaßt und ist dadurch jetzt zu einem Lehrbuch geworden, das nur noch für das Hochschulstudium in Betracht kommt. Besonders fällt einem dieser Entwicklungsgang bei der vorliegenden Ausgabe auf. Da die neueren physikalischen Anschauungen und Lehren aufgenommen, aber der Umfang des Buches nicht wesentlich vermehrt werden sollte, so mußten Kürzungen eintreten. So sind z. B. die Kapitel fortgefallen, in denen die Elemente der Differential- und Integralrechnung behandelt wurden. Da ferner in den neu hinzugekommenen Abschnitten sowie in den Neubearbeitungen mit geringerer Zurückhaltung von der Differential- und Integralrechnung Gebrauch gemacht wird, so ist jetzt diese Rechnungsmethode als mehr oder weniger bekannt vorausgesetzt.

1) Dritte Auflage: s. diese Zeitschr. 18, 18, 1917.

Sehr viel tiefer gegenüber früher wird die Wärmelehre dargestellt. Aus der Feder Starkes stammen die sehr guten Kapitel: Kreisprozesse, Verallgemeinerung des Carnotschen Prinzips, der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie, Entropie und Wahrscheinlichkeit sowie das le Chatelier'sche Prinzip. Ferner ist die Darstellung der kinetischen Wärmetheorie eine ausgezeichnete. Um das jetzige Niveau des Buches zu charakterisieren, seien einige der hier ausführlicher behandelten Fragen genannt: Satz der gleichmäßigen Energieverteilung im thermodynamischen Gleichgewicht, Maxwellsches Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung. Theorie der Energiequanten. Man sieht: der alte „Grimsehl" ist viel gelehrter geworden.

Auch sonst ist eine große Zahl Verbesserungen und Erweiterungen eingetreten, wobei aber der Umfang des Buches doch nur um etwa zwei Druckbogen gestiegen ist.

Eine Bemerkung sei aber gemacht. In der Vorrede wird gesagt, daß die Relativitätstheorie (die im zweiten Bande gebracht werden soll?) eine geänderte formalere Auffassung des Kraft- und Massebegriffes verlangt. „Dem wird dadurch Rechnung getragen, daß die Begriffe der Masse und Trägheit eine Herausarbeitung mehr im Sinne dieser Theorie erfahren". Das scheint mir, wenigstens bei der Masse, nicht geglückt zu sein. Wenn in einem Buche, wie in dem von Grimsehl, jetzt zu lesen ist: „Die Masse bildet ein Maß für die Menge der Materie", so geht das einfach nicht. Allein die Definition der Masse als dem Proportionalitätsfaktor in der Newtonschen Bewegungsgleichung dürfte zulässig sein. Der Massebegriff, wie er in § 8 dargestellt wird, gibt nur die schwere Masse, von der trägen Masse wird nirgendwo gesprochen (auch nicht bei Behandlung der Bewegungsgleichung). Da die Fliehkräfte bei der Erdumdrehung eingehender behandelt werden, so wäre hier der gegebene Ort gewesen, um auf die grundlegenden Versuche von Eötvös über die Gleichheit von träger und schwerer Masse einzugehen, diese Versuche, die eine so fundamentale Rolle in der allgemeinen Relativitätstheorie spielen.

Im allgemeinen hat die Gleichartigkeit des Buches gelitten. Es besteht nicht mehr so ganz die harmonische gegenseitige Durchdringung der experimentellen Ergebnisse, abgeleitet aus durchsichtigen Versuchen, mit der Theorie. Die neuen, mehr theoretischen Abschnitte sind noch nicht vollständig in den ursprünglichen Organismus des Buches aufgenommen, sie wirken noch etwas als Fremdkörper, wenn man sie mit der alten Grimsehlschen Darstellung vergleicht.

Aber trotzdem: das Buch ist ausgezeichnet. Es gibt kein ähnliches oder besseres, das in diesem Umfange „höhere" Experimentalphysik bietet; es kann allen Studierenden, die sich nur etwas eingehender mit der Physik befassen wollen, auf das beste empfohlen werden. Ebenso wird auch der Lehrende aus dem Werke viel Anregung schöpfen können.

Edgar Meyer.

N. Bohr, Abhandlungen über Atombau aus den Jahren 1913—16. Autorisierte deutsche Übersetzung mit einem Geleitwort von N. Bohr. gr. 8°. XIX., 155 S. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn, 1921. M. 20.—.

Im Verlage von Friedr. Vieweg & Sohn ist eine Zusammenfassung von Abhandlungen von N. Bohr erschienen, die sich im Phil. Mag. und in der Nature in den Jahren 1913—16 finden. Einem jeden, der sich mit der modernen Atomtheorie beschäftigt, wird dieses Buch außerordentlich willkommen sein, zumal der Übersetzer, Herr Dr. Stintzing, den Wortlaut und Gedankeninhalt des englischen Originals überaus geschickt und treu wiedergegeben hat. Einen ganz besonderen Wert aber bekommen die Abhandlungen dadurch, daß N. Bohr ihnen ein treffliches Geleitwort vorausgeschickt hat. In ihm erklärt er uns, weshalb er sich entschlossen hat, die Abhandlungen nochmals hinausgehen zu lassen, daß sich seine Ansichten über diese und jene Einzelheit geändert haben; vor allem erkennt man daraus den Werdegang der Bohrschen Ideen über den Atombau. Von großem Werte ist die Abhandlung X: „Die Anwendung der Quantentheorie auf das periodische System". Diese sollte im Aprilheft 1916 im Phil. Mag. erscheinen, blieb aber unveröffentlicht, da der Verfasser Kenntnis von Sommerfelds Abhandlungen in den Sitzungsberichten der Münchner Akademie (1915) damals erhielt, seine Abhandlung daraufhin umarbeiten wollte, dann aber durch eine Folge von bedeutsamen Arbeiten veranlaßt wurde, die geklärte Darstellung seiner Anschauungen über die verschiedenen für die Frage des Atombaues in Betracht kommenden Anwendungen der Quantentheorie in zwei größeren Abhandlungen der Kopenhagener Akademie (1918) erscheinen zu lassen. Die genannte Schlußabhandlung X enthält die Fundamente der letzten Arbeiten — Eine Fülle von Anregungen und Gedanken bieten die gesammelten Abhandlungen von N. Bohr aus den Jahren 1913—16; und deshalb sind sie jedem Physiker zu empfehlen. — Zu begrüßen wäre sicherlich, wenn sich N. Bohr entschließen könnte, seine schon projektierte Einführung in seine Atomtheorie für Chemiker erscheinen zu lassen. K. Bergwitz.

Tagesereignisse.

Die staatliche Hauptstelle für den naturwissenschaftlichen Unterricht, Berlin W 35, Potsdamer Straße 120, wird in der Zeit vom **4. bis 15. Oktober 1921 einen mathematisch-naturwissenschaftlichen Ferienkursus** abhalten zu Berlin für Lehrer höherer Schulen. Sie versendet ein ausführliches Programm der in Aussicht genommenen Kurse.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Wien der Privatdozent an der Universität Wien Dr. Adolf Smekal für das Gesamtgebiet der Physik, der Studienrat am Johannesgymnasium in Breslau Professor Dr. Ferenc Jüttner an der Universität Breslau für Theoretische Physik, an der Universität Berlin Dr. Gerhard Hettner für Physik.

Ernannt: Der Wirkl. Admiralitätsrat Professor Dr. Ernst Kohlschütter in Berlin zum ord. Professor der Geodäsie an der Universität Berlin, der a. o. Professor an der Universität Freiburg i. Br. Dr. Emil Fromm zum ord. Professor der Chemie an der Universität Wien.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der Physik an der Universität Würzburg Dr. Johannes Stark.

Gesuche.

Physikerin,

mit Auszeichnung promoviert, 1 Jahr Hochschulassistentin, beste Referenzen, sucht passende Stellung in der Industrie. Angebote unter **S. H. 581** an die Geschäftsstelle der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel), Leipzig, Königstraße 2.

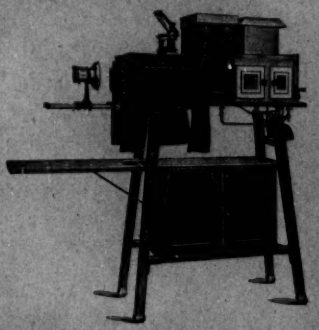
Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig

MAX KOHL A.G. Chemnitz

Volleingezahltes
= Kapital =
Mk. 1600000.

Physikalische Apparate
Funken-Induktoren
Ölluftpumpen
Experimentier-Schalttafeln
Projektions-Apparate
Laboratorienmöbel
in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Große Preise; Turin 1911: 2 Große Preise; Dresden 1911: Großer Preis.



Kleines Megadiaskop. Projektions-Apparat für alle im Unterricht gebräuchlichen Projektionsarten, z. B. für durchfallendes Licht, für auffallendes Licht, für Mikroprojektion, Spektral-, Polarisations-Interferenzerscheinungen usw.

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

Soeben ist erschienen:

Grundzüge
der
Einsteinschen Relativitätstheorie
von

Dr. August Kopff
a. o. Professor der Astronomie an der Universität Heidelberg

Preis: 36 Mark, gebunden 42.50 Mark

Die „Grundzüge der Einsteinschen Relativitätstheorie" behandeln die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie und sollen als erste Einführung in möglichst einfacher Weise die grundlegenden Untersuchungen über diese Theorie wiedergeben. Die vorausgesetzten Kenntnisse in Mathematik und Physik umfassen etwa diejenigen, die an den Hochschulen in den ersten Semestern erworben werden.

Inhaltsverzeichnis:

Seite

Rotierende — in einer Minkowskischen F. Kottler 480

L., Ein praktisch brauchbarer Kathodenograph 491

Beitrag zu der Arbeit von H. Schüler algefälle an — in Gasentladungsröhren, ... 495

Zur Frage der Verschiebung der scheinSonnennähe, v. A. Kopff 495

Röhren: Beitrag zu der Arbeit von über Potentialgefälle an Elektroden in ost 495

Oszillograph: Ein praktisch brauchbarer renzinger 491

r Frage der Verschiebung der scheinrnörter in Sonnennähe 495

rag zu der Arbeit von H. Schüler über lle an Elektroden in Gasentladungs- 495

otierende Bezugssysteme in einer Minn Welt. II. 480

P., Über die Wirkungsweise des Siliziumoxyd 487

Welt: Rotierende Bezugssysteme in v. F. Kottler 480

Beitrag zu der Arbeit von H. Schüler Elektroden in Gasentladungsröhren, v. 495

rie: Über die physikalischen Grundlagen ten —, v. H. Weyl 475

Seite

Schüler: Beitrag zu der Arbeit von H. — über Potentialgefälle an Elektroden in Gasentladungsröhren, v. H. Kost 495

Sichtmesser: Ein neuer —, v. A. Wigand 484

Siliziumkarbiddetektor: Über die Wirkungsweise des —, v. F. Luchsinger 487

Trey, F., Die Bedeutung des elektrischen Windes für den Induktionsfunken. (Berichtigung.) 496

Weyl, H., Über die physikalischen Grundlagen der erweiterten Relativitätstheorie 473

Wigand, A., Ein neuer Sichtmesser 484

Richard Müller-Url, Braunschweig
Schleinitzstr. 19

Physikalische, chemische und meteorologische Unterrichts-Apparate und -Utensilien. — Glastechnische Präzisionsarbeiten.

Neuheiten: Coulombmeter nach Stephan D.R.O.M. Rigbis **Röhren für magnetische Strahlen** mit Vakuum-Regulierung D.R.O.M. — **Quecksilber-Schnellpumpe.** — **Präzisions-Vakuometer** D.R.O.M. **Pizzarello-Apparat.** — **Apparate für flüssige Luft.** — **Verflüssigte Gase in Röhren.** **Projektions- und Extrem-Thermometer.** — **Elektroskope** und **Trockensäulen.** **Vakuumröhren** nach Braun, Crookes, Geißler, Puluj, Lecher, Röntgen, Wehnelt. — **Leuchtschirme.** — **Normal-Geißlerröhren-Serie „Kompendium".** — **Original-Vakuumskala** nach Groß.

Въ современныхъ, новыхъ государства потребуются въ такихъ современныхъ, но общеизвѣстныхъ приборахъ какъ

Барреттеръ измерительный приборъ Гати для высокихъ напряженіе и для телефона.

Цѣна Руб. 2500 —

Béla Gáti,
Budapest IX, Gyáli-ut. 22.
Адр. Тел.: Belagatt Budapest.

duktorium
Patent Klingelfuß

...spule und eingeschal-... and Milliampèremeter.
...nd spannungslos gegen ...liebiger Entfernung ...d der Röntgenröhre ...werden.

... Co. Basel.

Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin SW. 68

Soeben erschien:

DER ÄTHER IM WELTBILD DER PHYSIK

Eine Begründung der Notwendigkeit der Äthervorstellung für die Physik mit besonderer Berücksichtigung des Gedankenkreises der Relativitätstheorie

Von

EMIL WIECHERT

Professor an der Universität Göttingen

Groß-Oktav. (44 S.) Geh. 3,40 M.

„Wir müssen uns freimachen von jenem Materialismus, welcher in der Welt nur anerkennen will, was die Sinne uns zeigen." (S. 42 der Schrift.)